Gram-Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren

gegeben: Folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gesucht: Eine Orthonormalbasis des von diesen Vektoren aufgespannten Raumes.

1. $\vec{x}$ ist der 1. Richtungsvektor ($\vec{v_1}$). $||\vec{x}|| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$.

   Erste normierter Richtungsvektor $\underline{\underline{\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

2. Berechnung des nächsten Richtungsvektors $\vec{v_2}$ durch Einbeziehung von $\vec{y}$ nach der Formel

   $$\underline{\vec{v_2} = \vec{y} - \langle \vec{u_1}, \vec{y} \rangle \cdot \vec{u_1}}$$

   NR: $\quad \langle \vec{u_1}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(0+4+0) = \frac{4}{\sqrt{5}}$

   $$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   Mit $||\vec{v_2}|| = \frac{4}{5}\sqrt{16+4+25} = \ldots = \frac{3}{\sqrt{5}}$ ergibt sich der zweite normierte Richtungsvektor $\vec{u_2} = \frac{1}{||\vec{v_2}||}\vec{v_2} = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 3} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}}$

3. Berechnung des nächsten Richtungsvektors $\vec{v_3}$ durch Einbeziehung von $\vec{z}$ nach der Formel

   $$\underline{\vec{v_3} = \vec{z} - \langle \vec{u_1}, \vec{z} \rangle \cdot \vec{u_1} - \langle \vec{u_2}, \vec{z} \rangle \cdot \vec{u_2}}$$

   NR: $\quad \langle \vec{u_1}, \vec{z} \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \langle \vec{u_2}, \vec{z} \rangle = \frac{-13}{3\sqrt{5}}$

   $$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{13}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Wir begnügen uns damit, den Richtungsvektor $\vec{\tilde{v}_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu normieren, um damit $\vec{u_3}$ zu erhalten:

   $||\vec{\tilde{v}_3}|| = \sqrt{4+1+4} = 3. \qquad \underline{\underline{\vec{u_3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

4. Die Einbeziehung des 4. Vektors $\vec{w}$ bringt keinen weiteren Beitrag zur Orthonormalbasis, wie folgende Rechnung zeigt:

   $$\underline{\vec{v_4} = \vec{w} - \langle \vec{u_1}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u_1} - \langle \vec{u_2}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u_2} - \langle \vec{u_3}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u_3}} = \ldots = \vec{0}$$

Lösung: Die Vektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ und $\vec{u_3}$ bilden damit die gesuchte Basis.