120. Betrachten Sie das quadratische Minimierungsproblem $\min f(x)$ mit $f(x) = 1/2x^tQx - c^tx$ mit einer positiv definiten Matrix Q. Sei x^* ein lokaler Minimierer von f. Ferner sei v ein Eigenvektor von Q und λ der zugehörige Eigenwert.

    Angenommen wir starten die steilste Abstiegsmethode mit $x^{(0)} = x^* + v$.

    (a) Berechnen Sie $\nabla f(x^{(0)})$.
    (b) Zeigen Sie, dass wenn die exakte Schrittweitenstrategie verwendet wird, sich als Schrittweite $t_0 = \frac{1}{\lambda}$ ergibt.
    (c) Zeigen Sie, dass bei dieser Vorgangsweise das Verfahren nach einer Iteration abbricht.
    (d) Demonstrieren Sie Obiges für das konkrete Beispiel mit $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 6x_2$ mit dem Startpunkt $x^{(0)} = (1, 2)^t$. Zeigen Sie, dass $x^* = x^{(1)}$ das globale (eindeutige) Minimum darstellt und zeigen Sie, dass $x^{(0)} - x^*$ ein Eigenvektor der Hessematrix ist.

121. Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass wenn im generischen Abstiegsverfahren eine gradientenähnliche Abstiegsrichtung $d^{(k)}$ verwendet wird und die Schrittweite t_k mit der Armijo-Regel als

    $$t_k = \max\{\beta^i \mid i \in \mathbb{N} \text{ sodass } f(x^{(k)} + \beta^i d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma\beta^i \nabla f(x^{(k)})^t d^{(k)}\}$$

    bestimmt wird, jeder Häufungspunkt der Folge $\{x^{(k)}\}$ ein stationärer Punkt von f ist.

122. Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $H^{(k)}$ eine Folge von symmetrischen, positiv definiten Matrizen, die

    $$\mu_1||x||^2 \leq x^t H^{(k)} x \leq \mu_2||x||^2$$

    für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\mu_1, \mu_2 > 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass wenn im generischen Abstiegsverfahren die Abstiegsrichtungen $d^{(k)}$ so gewählt werden, dass

    $$H^{(k)} d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

    und die Schrittweite t_k mit der Armijo-Regel wie in Aufgabe 121 bestimmt wird, jeder Häufungspunkt der Folge $\{x^{(k)}\}$ ein stationärer Punkt von f ist.

123. Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und koerziv, d.h., für jede Folge $\{z^k\}$ im $\mathbb{R}^n$ gelte

    $$||z^k|| \to \infty \implies f(z^k) \to \infty \quad \text{für } k \to \infty$$

    Sei x^* ein globaler Minimierer von f. Sei $\{x^{(k)}\}$ eine vom generischen Abstiegsverfahren erzeugte Folge wobei als Abstiegsrichtung $d^{(k)}$ eine gradientenähnliche Richtung gewählt wird und die Schrittweite t_k mit der Armijo-Regel wie in Aufgabe 121 bestimmt wird. Zeigen Sie dass dann folgendes gilt:

    (a) Die Folge $\{x^{(k)}\}$ besitzt eine Teilfolge, die gegen einen stationären Punkt von f konvergiert.
    (b) Wenn f konvex ist, dann gilt $f(x^{(k)}) \to f(x^*)$ für $k \to \infty$.
    (c) Wenn f strikt konvex ist, dann gilt $x^{(k)} \to x^*$ für $k \to \infty$.

124. (a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Eigenwerten der positiv definiten symmetrischen Matrix Q eine untere und eine obere Schranke für den Quotienten

    $$\frac{x^tQx}{x^tx}.$$

    (b) Der Punkt x^* sei der Punkt, an dem die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^tQx + c^tx$ ihr Minimum annimmt, und $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ seien die aufeinanderfolgenden Näherungspunkte bei der Methode des steilsten Abstiegs. Bestimmen Sie eine Schranke für $\|x^{(k)} - x^*\|$ in Abhängigkeit von k, $\|x^{(0)} - x^*\|$, und den Eigenwerten von Q.