76. Beweisen Sie die folgende Aussage, die in der Vorlesung formuliert, aber nicht bewiesen wurde:

Wenn das lineare Programm $\max\{c^t x : Ax + w = b,\ x, w \geq 0\}$ zulässige Lösungen besitzt und die Menge der zulässigen Lösungen beschränkt ist, dann gibt es eine strikt zulässige Lösung $y > 0$, $z > 0$ des dualen linearen Programms $\min\{b^t y : A^t y - z = c,\ y, z \geq 0\}$.

Hinweis: Es ist einfacher zu zeigen, dass die obige Aussage äquivalent zur untenstehenden ist und dann diese zu beweisen: Wenn ein lineares Programm zulässige Lösungen besitzt und das dazu duale Null-Variablen aufweist (das sind Variablen, die in jeder zulässigen Lösung Null sind), dann ist die Menge der zulässigen Lösungen des primalen Problems unbeschränkt.

77. Gegeben sei das lineare Programm

$$\max \quad \cos\alpha\ x_1 + \sin\alpha\ x_2$$

unter

$$x_1 \leq 1, \quad x_2 \leq 1, \quad x \geq 0.$$

(α ist ein fester Parameter mit $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α den zentralen Pfad.

78. Betrachten Sie das folgende lineare Programm (P)

$$\begin{array}{lccccccc} \min & & & x_2 & & & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} & & \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie den zentralen Pfad $\{(x_\mu, y_\mu, z_\mu), \mu > 0\}$ (hierbei bezeichnet x den Gesamtvektor der primalen Variablen, inklusive Schlupfvariablen, und (y, z) den Vektor der Variablen im Dualproblem mit Gleichungsnebenbedingungen).

(b) Gegen welchen Punkt strebt der zentrale Pfad für $\mu \to 0$?

(c) Was läßt sich aus (b) über die Optimallösung zu (P) und dessen Dualproblem ablesen?

79. Berechnen Sie für das untenstehende lineare Programm den zentralen Pfad und stellen Sie ihn, sofern möglich, graphisch dar (getrennt nach Komponenten). Bestimmen Sie ferner die beiden Grenzwerte $\lim_{\mu\to\infty}(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$ und $\lim_{\mu\to 0}(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$. Drücken Sie ferner die Dualitätslücke (duality gap; Differenz zwischen dem augenblicklichen primalen und dem dualen Zielfunktionswert) in Abhängigkeit von μ aus.

$$\max -x_2$$

unter

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & & \geq 0. & \end{array}$$

80. Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

unter

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & b_1 \\ & & & & x_3 & = & b_2 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(a) Sei $b_1 = 0$ und $b_2 = 1$. Berechnen Sie den zentralen Pfad und stellen Sie ihn zeichnerisch dar (primale und duale Komponenten getrennt).

(b) Sei $b_1 = 1$ und $b_2 = 1$. Berechnen Sie den zentralen Pfad und stellen Sie ihn zeichnerisch dar (primale und duale Komponenten getrennt).

81. Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$\max x_1 + 2x_2$$

unter

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & & \geq 0. & \end{array}$$

(a) Wenden Sie die primal-duale Pfadverfolgungsmethode an. Starten Sie von der Lösung (x, w, y, z) mit $(x, w) = (1/2, 1/2, 5/2, 13/2, 3/2)$, $y = (1, 1, 5)$ und z so gewählt, daß (y, z) zulässig für das duale Problem ist. Wählen Sie abweichend von der in der Vorlesung beschriebenen Variante zu Beginn $\mu = 10$ und reduzieren Sie μ in jeder Iteration um den Faktor 10 (Multiplikation mit 1/10). Der Schrittlängenparameter r sei 0.99999.

Führen Sie einige Iterationen aus und geben Sie die Werte an für: primale und duale Variablen, Parameter μ, den Wert $x^t z - n\mu$ (Maß für Abweichung von Optimalität), sowie primaler und dualer Zielfunktionswert. (Computereinsatz wird für diese Aufgabe eindrücklich empfohlen.)

(b) Gegen welche Lösung (x, w, y, z) konvergiert die Iterationsfolge des Pfadverfolgungsverfahrens in diesem Beispiel? Überprüfen Sie die Optimalität.

(c) Was können Sie über die Eindeutigkeit der Optimallösungen für (P) und (D) aussagen?

(d) Könnte man die Lösung aus 81b auch mit der Simplexmethode erhalten?

82. Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$\max -x_1 + x_2$$

unter

$$\begin{array}{rcr} & x_2 \leq & 1 \\ -x_1 & \leq & -1 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Berechnen Sie den zentralen Pfad und stellen Sie ihn graphisch dar.

83. Wenden Sie die primal-duale Pfadverfolgungsmethode auf das untenstehende lineare Programm an:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & + & 5x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Starten Sie mit dem Vektor $(x, w, y, z) = (e, e, e, e)$, wobei e einen Vektor mit passender Dimension und allen Einträgen gleich eins bezeichnet. Setzten Sie die Steuerungsparameter wie folgt: $\delta = 1/10$, $r = 9/10$. (Beachten Sie, dass das Verfahren im allgemeinen *nicht zwangsweise* mit einem Paar von *zulässigen* primalen und dualen Lösungen starten muss.

(a) Führen Sie alle Schritte der ersten Iteration aus. Wie sieht der nach dieser Iteration aktualisierte Vektor (x, w, y, z) aus?

(b) (Mit Computereinsatz) Führen Sie eine ausreichende Anzahl von Iterationen aus, um etwas über die Optimallösung aussagen zu können.

84. Sei $\{(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu) \colon \mu > 0\}$ der zentraler Pfad (vgl. Vorlesung).

   (a) Zeigen Sie, dass $\lim_{\mu\to\infty}(b^t y_\mu - c^t x_\mu) = \infty$
   (Hinweis: Nutzen Sie die Gleichung $\mu(n+m) = x_\mu^t z_\mu + w_\mu^t y_\mu$.)

   (b) Verwenden Sie das Ergebnis aus (a) um folgende Aussage zu beweisen: Wenn ein lineares Programm ein nicht leeres Inneres besitzt und eine beschränkte Menge von zulässigen Lösungen hat, dann ist die Menge der zulässigen Lösungen des zugehörigen dualen Problems unbeschränkt.

85. Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\max -x_1 - 3x_2 - x_3$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & + & w_1 & & & = & -5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & + & w_2 & = & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0.$$

Wenden Sie die primal-duale Pfadverfolgungsmethode aus der Vorlesung an.

   (a) Starten Sie mit $(x, w, y, z) = (e, e, e, e)$. (Hierbei werden x, w, y, z und e wie in der Vorlesung eingeführt, verwendet.)

   (b) Führen Sie einige Iterationen aus und geben Sie die Werte an für: die primalen und dualen Variablen, den Parameter μ, den primalen und dualen Zielfunktionswert sowie die Norm der aktuellen primalen und dualen Residualvektoren ρ bzw. σ.

86. Wenden Sie die primal-duale Pfadverfolgungsmethode auf folgendes lineare Programm an:

$$\max -x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

unter

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Dieses Problem ist offensichtlich unzulässig. Was beobachten Sie?

87. (Skalierungsinvarianz)

Betrachten Sie ein primal-duales Paar von linaren Programmen P und D wie folgt

$$(P)\ \max\{c^t x \colon Ax + w = b\,, x, w \geq 0\} \text{ und } (D)\ \min\{b^t y \colon A^t y - z = c\,, y, z \geq 0\}\,.$$

Seien R und S zwei Diagonalmatrizen mit jeweils positiven Einträgen auf der Diagonale. Betrachten Sie die skalierten Reformulierungen $\bar{P}$ bzw. $\bar{D}$ der ursprünglichen Probleme wie folgt:

$$(\bar{P})\ \max\{(Sc)^t \bar{x} \colon RAS\bar{x} + \bar{w} = Rb\,, \bar{x}, \bar{w} \geq 0\} \text{ und } (\bar{D})\ \min\{(Rb)^t y \colon SA^t R\bar{y} - \bar{z} = Sc\,, \bar{y}, \bar{z} \geq 0\}\,.$$

Sei (x^k, w^k, y^k, z^k) die Folge der von der Pfadverfolgungsmethode generierten Vektoren, angewandt auf das Problempaar P und D. Analog sei $(\bar{x}^k, \bar{w}^k, \bar{y}^k, \bar{z}^k)$ die Folge der von der Pfadverfolgungsmethode generierten Vektoren, angewandt auf das Problempaar $\bar{P}$ und $\bar{D}$. Es wird angenommen, dass die jeweiligen Startvektoren folgende Gleichungen erfüllen:

$$\bar{x}^0 = S^{-1}x^0\,, \bar{w}^0 = Rw^0\,, \bar{y}^0 = R^{-1}y^0\,, \bar{z}^0 = Sz^0\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Relationen im Laufe des Verfahrens erhalten bleiben, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\bar{x}^k = S^{-1}x^k\,, \bar{w}^k = Rw^k\,, \bar{y}^k = R^{-1}y^k\,, \bar{z}^k = Sz^k\,.$$

88. (Das lineare Komplementaritätsproblem (lKOP))

Sei $M \in \mathbb{R}^{\mathrm{k}\times\mathrm{k}}$, $q \in \mathbb{R}^{\mathrm{k}}$ und $k \in \mathbb{N}$. Das lineare Komplementaritätsproblem (lKoP) mit Input M, q besteht in der Bestimmung eines Vektors $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{k}}$, der folgende Gleichungen erfüllt: $-Mx + z = q$, $XZe = 0$ und $x, z \geq 0$. Hier sind X und Z Diagonalmatrizen mit den Vektoren x bzw. z in der Diagonale, und $e \in \mathbb{R}^{\mathrm{k}}$ ein Vektor mit allen Einträgen gleich Eins. (Beachten Sie, dass die erste Gleichung als Definition des Vektors z dienen kann, somit ist die Lösung des lKoP eindeutig durch x definiert).

(a) Zeigen Sie, dass die Komplementaritätsbedingungen für primal-duale Paare von linearen Programmen als lienares Komplementaritätsproblem dargestellt werden können. Wie sieht der Input dieses lKoP (im Bezug auf die Inputs der linearen Programme) aus?

(b) Die primal-duale Pfadverfolgungsmethode kann auch zur Lösung des lKoP verwendet werden. Der wesentliche Schritt ist das Ersetzen der Komplementaritätsgleichung $XZe = 0$ durch eine μ-Komplementaritätsgleichung $XZe = \mu e$ um dann einen Richtungsvektor $(\Delta x, \Delta z)$ mit Hilfe eines Newton-Schrittes zu bestimmen. Arbeiten Sie die Einzelheiten aus und leiten Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung von $(\Delta x, \Delta z)$ her.

(c) Geben Sie hinreichende Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung des Gleichungssystems aus (b) an.

(d) Geben Sie ein generisches Pfadverfolgungsverfahren für das lKoP an (in Pseudocodeform).