58. Beweisen Sie: Wenn das lineare Programm

$$\max \{ c^t x \mid Ax \le b,\, x \ge 0 \}$$

keinen zulässigen Punkt x hat, dann gibt es einen Vektor d, sodaß das lineare Programm

$$\min \{ b^t y \mid A^t y \ge d,\, y \ge 0 \}$$

unbeschränkt ist.

59. Beweisen Sie:
Das primale lineare Programm

$$\max \{ c^t x \mid Ax \le b,\, x \ge 0 \}$$

hat genau dann für jeden Vektor b eine Optimallösung, wenn das duale lineare Programm

$$\min \{ b^t y \mid A^t y \ge c,\, y \ge 0 \}$$

mindestens einen zulässigen Punkt y hat, und wenn es eine Schranke K gibt, sodass für jeden zulässigen Punkt y des dualen linearen Programms gilt: $\|y\|_\infty \le K$.

60. Zeigen Sie: Hat ein lineares Programm Nebenbedingungen der Form $Cx = d$, wobei C eine $k \times n$ Matrix mit $\mathrm{rg}(C) < k$ ist, so ist die optimale Lösung des dualen Problems nicht eindeutig.

61. Dualität für lineare Programme mit Absolutbeträgen.
Bringen Sie ein lineares Programm, von der Art, wie sie im folgenden angegeben ist, in Standardform. Bestimmen Sie das duale Programm und vereinfachen Sie es.

   (a) ein lineares Programm, das in Standardform ist, außer dass die Variable x_1 nicht vorzeichenbeschränkt ist und in der (zu maximierenden) Zielfunktion in der Form $-|c_1 x_1|$ statt als Summand $c_1 x_1$ auftritt;

   (b) ein lineares Programm in Standardform mit einer zusätzlichen Restriktion der Form $|\alpha| \le b$, wobei α eine lineare Funktion in den Variablen $x_1, x_2, \ldots$ (ohne konstantes Glied) und b eine Konstante ist.

62. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \le & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \le & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \le & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \le & 1
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

   (a) Prüfen Sie mit dem Satz vom komplementären Schlupf, ob die Lösung mit $x_2 = 4/3$, $x_3 = 2/3$, $x_4 = 5/3$ und $x_1 = x_5 = 0$ eine optimale Lösung ist.

   (b) Wie (a) für die Lösung mit $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, $x_3 = 10$ und $x_4 = 23$.

63. Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{rl}
\text{maximiere} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \\
\text{unter} & x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \le 4 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_5 \le 3 \\
& x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{array}$$

(a) Ist der Punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{5}{12}, 0, 0)$ eine Optimallösung? Wenn ja, beweisen Sie es. Wenn nein, finden Sie eine bessere Lösung. Nehmen Sie dazu auf jeden Fall das duale Programm und den Satz vom komplementären Schlupf zu Hilfe.

(b) Wie (a) für die Lösung mit $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 1/2$ und $x_4 = x_5 = 0$.

64. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{min} & 2\,x_1 & + & 9\,x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{unter} & -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ & x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\ & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} & & \end{array}$$

(a) Stellen Sie das zu P duale lineare Programm D auf.

(b) Bestimmen Sie Optimallösungen von P und D sowie die zugehörigen optimalen Zielfunktionswerte. (Wählen Sie dazu eine Ihnen vom Rechenaufwand her vorteilhaft erscheinende Vorgangsweise.)

(c) Wie groß darf der Zielfunktionskoeffizient der Variable im Dualproblem D, die zur ersten Restriktion in P korrespondiert, maximal werden, ohne daß sich die Optimallösung von D verändert?

65. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{min} & -8\,x_1 & - & 3\,x_2 & & & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & 5 \\ & 4x_1 & - & x_2 & & & \leq & -2 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} & & \end{array}$$

(a) Stellen Sie das zu P duale lineare Programm D auf.

(b) Prüfen Sie ob $x = (0, 2, 3/4)$ eine Optimallösung von P darstellt. Wenn dies nicht der Fall ist, bestimmen Sie eine solche.

(c) Bestimmen Sie eine Optimallösung für D sowie den zugehörigen optimalen Zielfunktionswert.

66. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \text{min} & -5x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 10 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 10 \\ & & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq & 7 \\ & & & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} & & \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Basislösung von P, die zur Basis $(1, 2, 3, 4)$ korrespondiert.

(b) Stellen Sie das zu P duale lineare Programm D auf.

(c) Prüfen Sie ob die in (a) bestimmte Basislösung eine Optimallösung von P darstellt. Wenn dies nicht der Fall ist, bestimmen Sie eine solche.

(d) Bestimmen Sie eine Optimallösung für D sowie den zugehörigen optimalen Zielfunktionswert.

67. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \text{max} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & c_3x_3 & + & c_4x_4 & & \\ \text{unter} & 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Bestimmen Sie die Basislösung zu den Spalten 1 und 2, und zeigen Sie, daß diese Basislösung zulässig ist. Wie groß kann c_3, c_4 maximal gewählt werden, damit diese Basislösung optimal ist. Stellen Sie das dazugehörige Tableau auf, und bestimmen sie die zugehörige Duallösung.

68. Gegeben seien reelle Zahlen $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > c_n$, und folgendes lineare Programm:

$$\max\ c^t x : \quad \text{unter} \quad \sum_i x_i = 3, \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

Stellen Sie das duale Problem dazu auf, und geben Sie (ohne zu rechnen) eine optimale Lösung des primalen und dualen Problems an.

69. Konstruieren Sie eine explizite Optimallösung für das lineare Programm aus Aufgabe 7 sowie für das zugehörige duale lineare Programm an.

70. Ein Paar (x^*, y^*) bestehend aus einer zulässigen Lösung x^* für das primale Problem (P) und einer zulässigen Lösung y^* für das duale Problem (D) wird *strikt komplementär* genannt, wenn gilt

- $x_i^* = 0$ genau dann wenn die i-te duale Restriktion nicht mit Gleichheit erfüll ist.
- $y_i^* = 0$ genau dann wenn die i-te primale Restriktion nicht mit Gleichheit erfüllt ist.

(Anmerkung: Dies ist eine Verschärfung der Komplementaritätsbedingung aus dem Satz vom komplementären Schlupf.)

Es kann gezeigt werden, dass es wenn es ein optimales Paar gibt stets ein strikt komplementäres gibt. Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llcll} \min & 5x_1 & + & 5x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \geq 2 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x2 & \geq & 0 \end{array}$$

Erfüllt die optimale Lösung $(x_1^*, x_2^*) = (2/3, 4/3)$ des obigen Problems und die dazugehörige Optimallösung des dualen Problems die strikte Komplementarität-Bedingung? Bestimmen Sie alle Paare von optimal primalen und optimal dualen Lösungen, die strikt komplementär sind.

71. Lösen Sie folgendes lineares Programm mit dem dualen Simplexverfahren:

$$\min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & \geq & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 10 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & \geq & 15 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Bestimmen Sie ferner eine Optimallösung, wenn die zusätzliche Restriktion $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8$ eingeführt wird.

72. Lösen Sie folgendes lineare Programm mit der primalen und dualen Simplexmethode.

$$\max -x_1 - x_2 \text{ unter } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

73. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\min 4x_1 + 4x_3 + 5x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \geq & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \geq & 6 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \geq & 3 \\ & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ frei}, \; x_4 \geq 0.$$

(a) Lösen Sie D auf möglichst geschickte Weise.

(b) Geben Sie eine Optimallösung für P an.

74. Zeigen Sie dass das lineare Programm $\min\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$ unbeschränkt ist genau dann wenn es einen Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ gibt sodass $Ad = 0$ $d \geq 0$ und $c^t d < 0$ gilt.

75. Lösen Sie das untenstehende lineare Programm mit einem Verfahren ihrer Wahl. Sei $x^* \in \mathbb{R}^4$ eine optimale Lösung. Wir bezeichnen mit $c = (1, 2, 1, 1)^T$ und $b = (8, 12, 18)^T$ die Vektoren der Koeffizienten in der Zielfunktion bzw. auf der rechten Seite der linearen Restriktionen. Ermitteln Sie für jedes c_i, $1 \leq i \leq 4$, bzw. b_j, $1 \leq j \leq 3$, das größtmögliche Intervall $[\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ bzw. $[\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, sodass x^* eine optimale Lösung des linaren Programms bleibt, für alle Werte $c_i \in [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ bzw. $b_j \in [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\ \text{unter} & & & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \leq & 8 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & \leq & 18 \\ & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$