46. Überlegen Sie sich wie ein Problem der Form $\min\{c^T x \colon Ax \geq b, x \geq 0\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m_-$ (komponentenweise), $c, x \in \mathbb{R}^n$, mit einem angepassten Simplexverfahren direkt gelöst werden kann, ohne zunächst auf kanonische Form transformiert werden zu müssen. Wie wurden Sie die Startlösung konstruieren? Wie wurden Sie die Startlösung konstruieren, wenn die Annahme $b \in \mathbb{R}^m_-$ nicht gilt? Begründen Sie Ihre Antworten und Schlussfolgerungen sorgfältig.

    Lösen Sie folgendes Problem

$$\begin{array}{llcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{unter} & -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\
 & & & x_1 & & x_2 \quad x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

    mit dem wie oben beschrieben modifizierten Simplexverfahren

47. Betrachten Sie das lineare Optimierungsprogramm $\max\{c^t x \colon Ax \leq b, Gx = d, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m_1}_+$, $d \in \mathbb{R}^{m_2}_+$, $c \in \mathbb{R}^n$. Überlegen Sie sich eine Vorgangsweise analog zur 2-Phasenmethode, um die Gleichungsnebenbedingungen direkt zu behandlen ohne diese in 2 Ungleichungen umzuformen. (Hinweis: Führen Sie pro Gleichung eine neue Variable ein.)

    Demonstrieren Sie Ihren Ansatz an Hand des folgenden linearen Programms:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 30 \\
 & 8x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 30
\end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

48. Überlegen Sie sich wie das Optimalitätskriterium, das Zeilenauswahlkriterium und das Kriterium für das Vorliegen eines unbeschränkten linearen Programs zu adaptieren sind, um nicht vorzeichenbeschränkte Variable direkt in das Simplexverfahren zu integrieren und nicht durch die Differenz zweier vorzeichenbeschränkter Variablen darzustellen.

    Wenden Sie Ihre Überlegungen auf das folgende lineare Programm an:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{unter} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 120 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & \leq & 80 \\
 & -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 100
\end{array}$$

$$x_2 \geq 0,\ x_1,\ x_3 \text{ frei.}$$

    Wie ändert sich die Lösung, wenn nur x_1 eine freie Variable ist? Wie ändert sich die Lösung, wenn alle drei Variablen frei sind?

49. Überlegen Sie sich wie man untere Schranken $x_j \geq \ell_j$ schon vor dem Start des Simplexverfahren aus der Welt schaffen kann (Zurückführung auf den Standardfall) und wenden Sie Ihre Überlegungen auf folgendes Beispiel an:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6
\end{array}$$

$$1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 10$$

50. Wieviele zulässige Basislösungen haben die folgenden lineare Programme:

   (a) $\max x_1$ unter $0 \leq x_i \leq 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

   (b) $\max x_n$ unter $\alpha \leq x_1 \leq 1$ und $\alpha x_i \leq x_{i+1} \leq 1 - \alpha x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Hierbei ist α eine fix gewählte Zahl in $(0, \frac{1}{2})$.

   Veranschaulichen Sie Ihre Resultate für die Fälle $n = 1, 2, 3$.

51. Betrachten Sie das lineare Programm aus Aufgabe 50b. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

   (a) Die zulässigen Ecken können so angeordnet werden, daß jede Ecke adjazent zur nachfolgenden ist und höhere Kosten aufweist als die vorhergehende.

   (b) Es gibt eine Pivotregel für die der Simplexalgorithmus $2^n - 1$ Pivotschritte ausführt, bevor er abbricht.

52. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x + d^t y \\ \text{unter} & Ax + By \leq b \\ & y_i = |x_i|, \ 1 \leq i \leq n \end{array}$$

   mit $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$. Weiters seien alle Einträge der Matrix B und des Vektors d nichtnegativ.

   (a) Formulieren Sie dieses Optimierungsproblem als lineares Programm.

   (b) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Formulierung, d.h. zeigen Sie, dass die beiden Probleme vom Gesichtspunkt der Existenz einer zulässigen Lösung und vom Gesichtspunkt des optimalen Zielfunktionswerts äquivalent sind.

   (c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, daß wenn die Matrix B negative Einträge enthalten kann, lokale Optima auftreten können, die keine globalen Optima sind. Was läßt sich daraus für die Formulierbarkeit des gegebenen Problems als lineares Programm besagen, wenn keine Vorzeicheneinschränkungen an B gemacht werden.

53. **Sensitivitätsanalyse.**

   (a) Betrachten sie eine Basislösung x des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$, die zur Basis B gehört. Wie ändert sich x, wenn die rechte Seite des linearen Programms sich von b auf $b + t$ ändert, aber die Basis B beibehalten wird? Wie ändert sich die Zielfunktion?

   (b) Gegeben sei eine nichtentartete Basislösung x des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$ ist, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Wenn $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$, dann ist die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t, x \geq 0 \,\}$ zulässig.

   (c) Gegeben sei eine optimale Basislösung x^* des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Wenn die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b+t,\ x \geq 0 \,\}$ zulässig ist, dann ist sie für dieses lineare Programm optimal.

   (d) Zeigen Sie: Wenn x^* eine nichtentartete optimale Basislösung mit Optimalwert z^* des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\}$ ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Der Optimalwert des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b+t,\ x \geq 0 \,\}$ läßt sich im Bereich $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$ in der Form

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} \pi_i t_i$$

   mit geeigneten Koeffizienten π_i darstellen.

54. **Sensitivitätsanalyse: Änderung eines Kostenkoeffizienten**

Gegeben sei ein lineares Programm in der Normalform $\max\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, sowie eine optimale Basis B. Untersuchen Sie für welchen Bereich kleiner Änderungen Δc_r eines Kostenkoeffizienten c_r, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, die Basis B optimal bleibt. Unterscheiden Sie zwei Fälle: $r \in B$ und $r \in N$, wobei $N := \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$. Wie ändert sich der optimale Zielfunktionswert falls B nach einer entsprechenden Änderungen von c_r umd Δ_r optimal bleibt?

Veranschaulichen Sie das Ergebnis Ihrer Untersuchung anhand des folgenden Beispiels

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 1 \\
 & & & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geq & 0 & &
\end{array}$$

nach dem Sie die Optimalität der Basis $B = (3, 2, 1)$ nachgewiesen haben.

55. Betrachten Sie folgende Problemstellung, ein sogenanntes *Ausgleichsproblem*. Eine physikalische Größe Φ hängt von n ($n \in \mathbb{N}$) anderen physikalischen Größen P_i, $1 \leq i \leq n$, ab. Die geschlossene Form der Abhängigkeit ist unbekannt, es wird jedoch vermutet, dass sie linear ist. Die Koeffizienten x_i, $1 \leq i \leq n$, der linearen Abhängigkeit sind unbekannt und müssen approximiert werden. Anhand von experimentellen Messungen (m an der Zahl) werden die Werte ϕ_j der Größe Φ bei gegebenen Werten u_{ij} der jeweiligen Größen P_i ermittelt, $1 \leq j \leq m$, $m > n$. Nun sollen die unbekannten Koeffizienten x_i der liearen Abhängigkeit, $1 \leq i \leq n$, so gewählt werden, dass eine Norm l des Vektors $\phi - Ux$ minimiert wird, wobei $\phi^T = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)$, $U = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

   (a) Zeigen Sie, das dieses Problem als lineares Programm formuliert werden kann, wenn als Norm l die l_1 oder l_∞ Norm gewählt wird.

   (b) Lösen Sie folgendes *Ausgleichsproblem*:

$$\min\{\max\{|x_1|, |x_2|, |4 - x_1 - x_2|\} : x \in \mathbb{R}^2\}\,.$$

56. Bestimmen Sie das duale Problem zu folgenden linearen Programmen:

   (a)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & \geq & -1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
 & \multicolumn{9}{c}{x_1 \text{ frei}, \; x_2, x_3, x_4 \geq 0.}
\end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 34x_1 & + & 5x_2 & + & 19x_3 & + & 9x_4 & & \\
\text{unter} & -2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \leq & -9 \\
 & 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \leq & 8 \\
 & 4x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \geq & 5 \\
 & \multicolumn{9}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}$$

57. Gegeben sei $\max c^t x$ unter $Ax \leq 0, x \geq 0$. Zeigen Sie: Entweder ist $x = 0$ eine optimale Lösung (es könnte auch noch andere optimale Lösungen geben), oder das Problem ist nach oben unbeschränkt.