19. Betrachten Sie das folgende lineare Programm

$$
\begin{array}{llcrcr}
\min & 4x_1 & + & 16x_2 & & \\
\text{s.t.} & & & & & \\
& 5x_1 & + & 2x_2 & \geq & 10 \\
& x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
& x_1 & + & 5x_2 & \geq & 5 \\
& & -x_1 & & \geq & -5 \\
& & & -x_2 & \geq & -5 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Stellen Sie die die zulässige Menge dieses linearen Programms (Polyeder P im $\mathbb{R}^2$) graphisch dar und lösen Sie das lineare Programm mit der graphischen Methode.

(b) Bestimmen Sie alle Seiten von P. Welche davon sind minimal?

(c) Bestimmen Sie unter Benutzung des Hauptsatzes der linearen Optimierung eine Optimallösung des obigen linearen Programms auf rechnerischem Wege.

20. Betrachten Sie die folgenden linearen Optimierungsprobleme und geben Sie gegebenenfalls jeweils eine äquivalente Formulierung in der kanonischen Form an. Geben Sie die dazugehörige Matrix A und den dazugehörigen Vektor b (vgl. Vorlesung) explizit an.

(a)
$$
\begin{array}{llcrcr}
\max & 3x_1 & - & 5x_2 & & \\
\text{s.t.} & & & & & \\
& 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 3 \\
& 6x_1 & - & 6x_2 & = & 7 \\
& x_1 & + & 8x_2 & \leq & 20 \\
& & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

(b)
$$
\begin{array}{llcrcrcrcr}
\min & 3x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & & \\
\text{s.t.} & & & & & & & & & \\
& 9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & \geq & 5 \\
& 8x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & = & 7 \\
& & & & & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

21. Bestimmen Sie drei Seiten S_1, S_2 und S_3 mit paarweise unterschiedlichen Dimensionen für das gegebene Polyeder P in $\mathbb{R}^3$:

$$P := \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_2 - x_1 \leq 0, x \geq 0\}.$$

Geben Sie jeweils $L(S_i)$ und $I(S_i)$ (Notation wie in der Vorlesung eingeführt) an.

22. Gegeben seien folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

(a) $M_1 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1 \}$.

(b) $M_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |\mathrm{x}_1| \leq 1, |\mathrm{x}_2| \leq 1, |\mathrm{x}_3| \geq 1 \}$.

(c) $M_3 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |\mathrm{x}_1| \leq |\mathrm{x}_2| \leq 1 \}$.

(d) $M_4 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |\mathrm{x}_1| + |\mathrm{x}_2| \geq 1 \}$.

(e) $M_5 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1 \}$.

(f) $M_6 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1 \}$.

(g) $M_7 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq |x_2| \leq |x_3| \leq 1$.

Für welche dieser Mengen läßt sich eine Matrix A und ein Vektor b finden, sodaß die jeweilige Menge als $Ax \leq b$ beschrieben werden kann? (Geben Sie in jedem einzelnen Fall entweder eine solche Matrix und einen solchen Vektor an oder begründen Sie deren Nicht-Existenz.)

23. Welche der folgende Optimierungsprobleme können als lineare Programme formuliert werden? (Die Lösung ist nicht gefragt.)

(a)
$$\begin{array}{lrcl} \min & \max\{z_1, z_2, z_3\} & & \\ \text{unter} & z_1 + z_2 + z_3 & = & 5 \\ & z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 & \leq & 4 \\ & z_1, z_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lrcl} \max & 3\,z_1 + 2\,z_2 + 4\,z_3 & & \\ \text{unter} & |\,z_1 + z_2 + z_3\,| & \leq & 5 \\ & z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 & \leq & 4 \\ & z_1 & \geq & 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{lrcl} \max & 3\,z_1 + 2\,z_2 + 4\,z_3 & & \\ \text{unter} & |\,z_1 + z_2 + z_3\,| & = & 2 \\ & z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 & \leq & 4 \\ & z_1 & \geq & 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{lrcl} \min & |x_1| + |x_2| + |x_3| & & \\ \text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 5 \\ & x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} & & \end{array}$$

24. Welche der folgende Optimierungsprobleme können als lineare Programme formuliert werden? (Die Lösung ist nicht gefragt.)

(a)
$$\begin{array}{lrcl} \min & 4 + |\,8\,x_1 - 2\,| + |\,x_1\,| & & \\ \text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 5 \\ & x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 & \leq & 4 \\ & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lrcl} \min & x_1 - |x_2| + |x_3| & & \\ \text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 5 \\ & x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} \max & 3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 6\,x_4 - x_5 - 2\,x_6 + 4\,x_7 \\ \text{unter} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \leq 1/2 \\ & \max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \leq \min\{x_5, x_6, x_7\} \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \leq 1 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{ll} \max & 3\,x_1 - 5\,x_2 + 4\,x_3 \\ \text{unter} & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ & |x_1 - 3x_2| \leq 5 \\ & \dfrac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2} \leq 4 \\ & 1 \leq x_1 \leq 5 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

25. Bringen Sie das untenstehende lineare Programm auf die in der Vorlesung eingeführte kanonische Form:

$$\min -6x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 15x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & \geq & -36 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & \leq & 72 \\ x_1 & + & & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_4 \quad \geq 0.$$

Anmerkung: Es gibt zwei Arten mit der nicht vorzeichenbeschränkten Variable x_3 umzugehen. Setzen Sie beide um und vergleichen Sie. Wären beiden Ansätze auch möglich, wenn statt x_3 die Variable x_2 nicht vorzeichenbeschränkt wäre?

26. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Für wahre Aussagen ist ein Beweis anzugeben und für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel.

(a) Gegeben sei ein lineares Programm mit redundanten Restriktionen. Das lineare Programm, das durch Wegwerfen aller redundanten Restriktionen resultiert, ist äquivalent zum ursprünglichen Problem. (Eine Restriktion wird als redundant bezeichnet, wenn das lineare Programm, das sich durch Weglassen dieser einen Restriktion ergibt, äquivalent zum Ausgangsproblem ist.)

(b) Gegeben sei ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen (Vorzeichenbedingungen werden hier nicht mitgezählt), einer Gleichungsrestriktion und n Variablen. Dieses lineare Programm läßt sich stets in ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen und $n-1$ Variablen überführen (indem eine Variable aus der Gleichung ermittelt und in das Restproblem eingesetzt wird).

(c) Die Maximierung der Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 < 0 \\ 4x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

läßt sich mit Hilfe einer linearen Formulierung in ein lineares Programm integrieren.

(d) Analog zu Aufgabe 26c für die Minimierung dieser Zielfunktion.

27. Betrachten Sie das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & sx_1 & + & tx_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Für welche Werte der Parameter s und t

(a) hat es eine Optimallösung?
(b) hat es eine eindeutige Optimallösung?
(c) ist es unzulässig?
(d) ist es unbeschränkt?

28. Sei $P := P(A, b) = \{x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \colon \mathrm{Ax} \leq \mathrm{b}\}$ mit $A \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m} \times \mathrm{n}}$ und $b \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$ ein Polyeder in $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$. Ein Vektor $d \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \setminus \{\vec{0}\}$ heißt *eine freie Richtung* von P, wenn es ein $\bar{x} \in P$ existiert, sodass $\{x \colon x = \bar{x} + \lambda d, \lambda \geq 0\} \subseteq P$ gilt. Eine freie Richtung von P heißt *extremal*, wenn sie nicht als Positivkombination zweier verschiedener freier Richtungen von P dargestellt werden kann. Zeigen Sie:

(a) $d \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \setminus \{\vec{0}\}$ ist eine freie Richtung von P genau dann, wenn $Ad \leq 0$ ist.

(b) Bestimmen Sie die freien Richtungen der Mengen

$$M = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathrm{I\!R}^2 \colon \mathrm{x_1 - 2x_2 \geq -6, x_1 - x_2 \geq -2, x_1 + x_2 \geq 1, x \geq 0}\}$$

und

$$N = M \cap \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathrm{I\!R}^2 \colon \mathrm{x_1 \leq x_2}\}.$$

(c) Sei $m = n$, $A \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$ invertierbar und $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$. Setze $z_i = -A^{-1}e_i$, for $i = 1, 2, \dots, n$. Zeigen Sie, dass die z_i, $i = 1, 2, \dots, n$, genau die extremalen freien Richtungen von $P(A, b)$ sind.

29. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Wenn das lineare Programm in Standardform

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_j & \text{für } i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j & \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist, dann gibt es einen Index k, für den das lineare Programm

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & x_k & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_j & \text{für } i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j & \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist. Gilt auch die umgekehrte Folgerung?