124. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) := (x_1 - x_2)^2 + 5(x_2 - x_1^2)^2$. Wenden Sie die in Aufgabe 122 aufgelisteten Verfahren auf dieses Problem an. Starten Sie im Punkt $(2, 0)^t$.

125. Wenden Sie die ersten drei in Aufgabe 122 angegebenen Verfahren sowie das Newtonverfahren auf das quadratische Optimierungsproblem $\min \frac{1}{2} x^t Q x - b^t x$ an, das sich mit

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

ergibt. (Starten Sie jeweils im Nullpunkt.)

Fassen Sie an Hand dieses Beispiels nochmals die Eigenschaften dieser Verfahren für den Spezialfall der quadratischen Optimierung zusammen.

126. Geben Sie an, wie der Koeffizient a und der Vektor u im Rahmen einer Rang 1 Update Formel für die Matrix G_{k+1} in einem Quasi-Newtonverfahren gewählt werden müssen, wenn die Matrizen G_k symmetrisch sein sollen. Zeigen Sie ferner, daß sich die dabei ergebende Variante die einzige Möglichkeit ist, einen Update der Form $G_{k+1} = G_k + C_k$, wobei C_k eine Matrix vom Rang 1 ist, auszuführen, wenn die Symmetrie erhalten werden soll.)

127. Beweisen Sie, daß die Matrix G_{k+1} in der DFP Methode positiv definit ist, wenn die Matrix G_k symmetrisch und positiv definit ist und $p_k^t q_k > 0$ gilt.

128. Gegeben sei das nichtlineare Problem: $\min x_2 + x_3$ unter $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Prüfen Sie, ob die Punkte $(1, 0, 0)^t$ und $(-1/3, 2/3, 2/3)^t$ die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung an ein lokales Minimum erfüllen.

129. Bestimmen Sie alle Punkte, die die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung an ein lokales Minimum erfüllen (Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Bedingungen).

$\min \ln \frac{1}{1+x_1} - x_2$ unter $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ 2x_1 + x_2 \leq 3$.

130. Gegeben sei das nichtlineare Problem:

$\min \quad 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 - 15x_1 - 15x_2 \quad$ unter $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 30$.

(a) Zeigen Sie, daß die Zielfunktion und die zulässige Menge konvex sind.
(b) Bestimmen Sie die KKT Bedingungen zur Identifikation lokaler Minima.
(c) Zeigen Sie, daß kein Punkt mit $x_1 = 0$ die KKT Bedingungen erfüllt.

131. Gegeben sie die Funktion f mit $f(x_1, x_2) := (x_1 - 1)^2 + x_2^2$.

Bestimmen Sie für $\min\ f(x_1, x_2)$ unter $2kx_1 - x_2^2 \leq 0$ alle Punkte, die die KKT Bedingungen erfüllen. (Dabei sei $0 < k < 1$ fest vorgegeben.)

132. Bestimmen Sie alle Punkte, die die KKT-Bedingungen für

$$\min x_1^3 + 4x_2^2 + 16x_3$$

unter

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad x_1 \geq 0$$

erfüllen.

133. (a) Untersuchen Sie, ob im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 4, 2)$ für das folgende Problem die KKT-Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{array}{rc} \text{minimiere} & xyz \\ \text{unter} & x^2 + y^2 + z^2 \geq 21 \\ & x + 4y + 2z \leq 30 \\ & x + y + z \geq 4 \\ & xz^2 \leq y \\ & x, y, z \geq 1 \end{array}$$

(b) Können Sie daraus etwas für die Frage, ob (x_0, y_0, z_0) ein lokales Optimum ist, schließen?

134. Sei A eine $m \times n$ Matrix und B eine $p \times n$ Matrix. A und B haben vollen Zeilenrang. Gegeben sei das lineare Programm

$$(P) \quad \min c^t x \ \text{ unter } \ Ax = a, \ Bx \geq b.$$

(a) Bestimmen Sie das duale Problem.

(b) Stellen Sie die KKT - Bedingungen für (P) auf.

(c) Zeigen Sie: Die KKT - Bedingungen liefern eine zulässige duale Lösung, mit der sich der Dualitätssatz der linearen Optimierung beweisen läßt.

135. Lösen Sie

$$\min \ x^t x \ \text{ unter } \ Ax = b.$$

(Dabei sei $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ und A eine $m \times n$ Matrix mit vollem Zeilenrang und $m < n$. (Gesucht ist also die Lösung des (unterbestimmten) Gleichungssystems $Ax = b$ mit minimaler Norm.) Wie lauten die Lagrangemultiplikatoren für die Gleichungen? Wie ergibt sich die Lösung mit Methoden der linearen Algebra?

136. (a) Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 4, \ x_2 \geq x_1^2\}$. Betrachten Sie die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$. Sei ferner $x^* = (2, 4)^t$. Bestimmen Sie die zulässigen Richtungen d in x^*. Prüfen Sie, ob die notwendigen Bedingungen erster Ordnung in x^* erfüllt sind, oder geben Sie eine zulässige Richtung an, entlang der sich f verringern lässt.

(b) Untersuchen Sie dieselbe Fragestellung für $f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$.

137. Bestimmen Sie die KKT-Punkte für das Optimierungsproblem: $\min x_1^3 + 2x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 8x_2$ unter $x_1 + x_2 \leq 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

138. Bestimmen Sie numerisch ein lokales Minimum von $e^{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$ unter $\sum_i x_i^2 = 10, \ \ x_2 x_3 = 5x_4 x_5, \ \ x_1^3 + x_2^3 = -1$.

139. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2.$$

Betrachten Sie das Optimierungsproblem: max $f(x_1, x_2)$ unter den Restriktionen $3x_1 + 2x_2 \geq 6$, $-x_1 + x_2 \leq 3$ und $x_1 \leq 2$.

(a) Finden Sie auf graphischem Wege alle lokalen Optima. Gibt es globale Optima? Wenn ja, geben Sie diese an, wenn nein, begründen Sie die Nicht-Existenz.

(b) Stellen Sie die KKT Bedingungen auf und bestimmen Sie alle Punkte, die diese Bedingungen erfüllen.

(c) Wie verändern sich die Kuhn-Tucker Bedingungen, wenn die Restriktion $x_1^4 \ln x_2 + 2x_2 = 10x_1$ hinzugefügt wird? (Hier sind die erfüllenden Punkte nicht gefragt!)

140. Gegeben sei das Optimierungsproblem $\min x_1^4 + x_2^4 + 12x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2$ unter den Restriktionen $x_1 + x_2 \geq 6$, $2x_1 - x_2 \geq 3$ und $x_1, x_2 \geq 0$.

    (a) Stellen Sie die KKT-Bedingungen auf und bestimmen Sie die KKT-Punkte.

    (b) Zeigen Sie, daß der Punkt $(3,3)^t$ die eindeutige Optimallösung dieses Optimierungsproblems darstellt.

141. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\max -2x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 10x_1 + 10x_2$$

unter den Restriktionen

$$-x_1^2 - x_2^2 \geq -5 \qquad 3x_1 + x_2 \leq 6 \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

    (a) Stellen Sie die KKT Bedingungen (notwendige Bedingungen 1. Ordnung) auf und bestimmen Sie alle Punkte, die diese Bedingungen erfüllen.

    (b) Wie verändern sich die KKT Bedingungen, wenn die Restriktionen $\cos x_1^4 + 2\sqrt{x_2} = 8$ und $x_1^4 + 5x_2 = 24$ hinzugefügt werden? (Hier sind die erfüllenden Punkte nicht gefragt!)

    (c) Befinden sich unter den in (i) bestimmten Punkten lokale Optima?