31. Gegeben sei das folgende lineare Programm P:

$$\max 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 15x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \leq & 36 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & \geq & -72 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 24 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

(a) Bestimmen Sie eine Optimallösung von P und geben Sie den zugehörigen Zielfunktionswert an.

(b) Ist die in (a) gefundene optimale Lösung eindeutig? (Begründung!)

(c) Welche der Restriktionen des Problems P können gestrichen werden, ohne die Optimallösung zu verändern? (Begründung!)

(d) Auf welchen Wert kann der Zielfunktionskoeffizient von x_1 höchstens erhöht bzw. gesenkt werden, ohne die Optimallösung zu verändern?

32. (**Pivots per WWW**) Navigieren Sie auf die folgende WWW-Seite (Java muß aktiviert sein, damit das Tool funktioniert): `http://campuscgi.princeton.edu/~rvdb/JAVA/pivot/primal_x0.html` und lesen sich den Anleitungstext der Aufgabe durch. Wählen Sie 5 als Zeilenzahl, 4 als Spaltenzahl, 542 als Seed und 2 als Anzahl der Probleme und lösen Sie die resultierenden linearen Programme durch Angabe der Folge der Pivotschritte. (Beachten Sie die benutzte Form der linearen Programme und achten Sie auf die richtige Interpretation der Zahlen. Wenn Sie weitere Erklärungen zum Datenformat brauchen, lesen Sie die Erläuterungen zur Simplexmethode im von Robert Vanderbei on-line zur Verfügung gestellten Kurzskriptum zu seiner Vorlesung lineare Optimierung. Sie erreichen diesen File direkt über `http://www.princeton.edu/~rvdb/542/lectures/lec2.pdf` oder durch Navigation über die Hauptseite.) Es ist nicht nötig, die e-mail Adressfelder auszufüllen. Sie sollten sich aber mit diesem Pivottool vertraut machen. Weitere Tools dieser Art finden sich auf der Seite `http://www.princeton.edu/~rvdb`.)

33. Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert der Funktion f mit $f(x) := x_1 + 3x_2 - x_3$ auf der Menge, die durch die folgenden Bedingungen beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

34. Lösen Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_1,\ x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

35. Lösen Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1,\ x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

36. Lösen Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 30 \\ & 8x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 30 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

37. Lösen Sie das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ \text{unter} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 120 \\ & x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & \leq & 80 \\ & -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 100 \end{array}$$

$$x_2 \geq 0,\ x_1,\ x_3 \text{ frei.}$$

Wie ändert sich die Lösung, wenn nur x_1 eine freie Variable ist? Wie ändert sich die Lösung, wenn alle drei Variablen frei sind?

38. Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 4 \\ & 2\,x_1 & & & + & 3\,x_3 & \leq & 5 \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \\ & 4\,x_1 & & & + & 4\,x_3 & \leq & 11 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

(a) mit der lexikographischen Zeilenauswahlregel,

(b) mit der kleinsten-Index-Regel.

39. Lösen Sie das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & \frac{3}{4}x_1 & - & 20x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & 6x_4 & & \\ \text{unter} & \frac{1}{4}x_1 & - & 8x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 & - & 12x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 3x_4 & \leq & 0 \\ & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

40. Lösen Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

$$1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 10$$

(Behandeln Sie die unteren und oberen Schranken nicht als explizite Restriktionen. Wie lassen sich untere Schranken schon vor Start des Simplexverfahrens leicht aus der Welt schaffen und auf den Standardfall der Vorzeichenbeschränkung zurückführen?)

41. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{min} & 9x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & & \\
\text{unter} & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & -10 \\
& x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & \geq & 5
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

(a) Lösen Sie dieses lineare Programm mit dem Simplexverfahren ausgehend von der Basislösung, die zu $B = (2, 3)$ gehört.

(b) Lösen Sie dieses lineare Programm mit der Zweiphasenmethode von Dantzig.

42. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl}
\text{min} & c^t x + d^t y \\
\text{unter} & Ax + By \leq b \\
& y_i = |x_i| \text{ für alle } i
\end{array}$$

Alle Einträge der Matrix B und des Vektors d seien nichtnegativ.

(a) Formulieren Sie dieses Optimierungsproblem als lineares Programm.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Formulierung. (D.h. zeigen Sie daß die beiden Probleme vom Gesichtspunkt der Existenz einer zulässigen Lösung und vom Gesichtspunkt des optimalen Zielfunktionswerts äquivalent sind.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, daß wenn die Matrix B negative Einträge enthalten kann, lokale Optima auftreten können, die keine globalen Optima sind. Was läßt sich daraus für die Formulierbarkeit des gegebenen Problems als lineares Programm besagen, wenn keine Vorzeicheneinschränkungen an B gemacht werden.

43. Wieviele zulässige Basislösungen haben die folgenden lineare Programme:

(a) $\max x_1$ unter $0 \leq x_i \leq 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) $\max x_n$ unter $\alpha \leq x_1 \leq 1$ und $\alpha x_i \leq x_{i+1} \leq 1 - \alpha x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Hierbei ist α eine fix gewählte Zahl in $(0, \frac{1}{2})$.

Veranschaulichen Sie Ihre Resultate für die Fälle $n = 1, 2, 3$.

44. Betrachten Sie das lineare Programm aus Aufgabe 43b. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Die zulässigen Ecken können so angeordnet werden, daß jede Ecke adjazent zur nachfolgenden ist und höhere Kosten aufweist als die vorhergehende.

(b) Es gibt eine Pivotregel für die der Simplexalgorithmus $2^n - 1$ Pivotschritte ausführt, bevor er abbricht.

45. Diese Aufgabe soll zeigen, dass die lexikographischen Zeilenauswahlregel als eine implizite Durchführung einer Pertubation des rechte Seitenvektors b in einen Vektor $b + \epsilon$ betrachtet werden kann. (Die Komponenten ε_i sind hierbei „klein genug“ zu wählen.)

(a) Beweisen Sie: Die Folge $(r_0, r_1, \ldots, r_m)$ ist genau dann lexikographisch kleiner als die Folge $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodaß stets

$$r_0 + r_1\varepsilon_1 + r_2\varepsilon_2 + \cdots + r_m\varepsilon_m < s_0 + s_1\varepsilon_1 + s_2\varepsilon_2 + \cdots + s_m\varepsilon_m$$

ist, sofern $0 < \varepsilon_1 \leq \delta$ und $0 < \varepsilon_i \leq \delta\varepsilon_{i-1}$ für alle $i = 2, \ldots, m$ ist.

(b) Beweisen Sie: Die Folge $(r_0, r_1, \ldots, r_m)$ ist genau dann lexikographisch kleiner als die Folge $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodaß für alle $0 < \varepsilon \leq \delta$ gilt:

$$r_0 + r_1\varepsilon + r_2\varepsilon^2 + \cdots + r_m\varepsilon^m < s_0 + s_1\varepsilon + s_2\varepsilon^2 + \cdots + s_m\varepsilon^m.$$

46. Formulieren Sie folgende Aufgaben als lineare Programme:

(a) Bestimmen Sie für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1 das größte enthaltene Quadrat.

(b) Bestimmen Sie für ein Quadrat mit Seitenlänge 1 das kleinste umschließende gleichseitige Dreieck.

47. **Sensitivitätsanalyse.**

(a) Betrachten sie eine Basislösung x des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$, die zur Basis B gehört. Wie ändert sich x, wenn die rechte Seite des linearen Programms sich von b auf $b + t$ ändert, aber die Basis B beibehalten wird? Wie ändert sich die Zielfunktion?

(b) Gegeben sei eine nichtentartete Basislösung x des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$ ist, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Wenn $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$, dann ist die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t, x \geq 0 \,\}$ zulässig.

(c) Gegeben sei eine optimale Basislösung x^* des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Wenn die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b+t,\ x \geq 0 \,\}$ zulässig ist, dann ist sie für dieses lineare Programm optimal.

(d) Zeigen Sie: Wenn x^* eine nichtentartete optimale Basislösung mit Optimalwert z^* des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\}$ ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Der Optimalwert des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b+t,\ x \geq 0 \,\}$ läßt sich im Bereich $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$ in der Form

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} \pi_i t_i$$

mit geeigneten Koeffizienten π_i darstellen.

48. (a) Formulieren Sie folgendes Problem als lineares Programm (oder als zwei lineare Programme): Für zwei gegebene endliche Mengen von Punkten in der Ebene soll eine Gerade berechnet werden, die die beiden Mengen trennt.

(b) Formulieren Sie dasselbe Problem in beliebigen Dimensionen. Die beiden Mengen von Punkten sollen durch eine Hyperebene getrennt werden. Wie viele Variablen hat Ihr lineares Programm?

49. (Satz von Carathéodory). Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie:

$$x \in \operatorname{conv}(S) \Longrightarrow \quad \exists x_1, \ldots, x_{n+1} \in S \text{ sodaß } x \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Dieser Satz besagt also, daß sich jeder Punkt der konvexen Hülle einer Menge S durch eine Konvexkombination von höchstens $n + 1$ Punkten aus S darstellen läßt.

Gegeben seien die Eckpunkte x_i eines Vierecks im $\mathbb{R}^2$: $x_1 = (0, 0), x_2 = (4, 1), x_3 = (2, 6), x_4 = (0, 3)$. Stellen Sie den Schwerpunkt $s = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i$ als Konvexkombination von höchstens 3 Eckpunkten dar.