18. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als *lineares* Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):

    Die Firma Hokuspokus erzeugt Trampoline. Am Jahresbeginn ist für jedes der 12 Monate bekannt, wieviele Trampoline am Ende dieses Monats an die Zwischenhändler ausgeliefert werden sollen. Bezeichne d_i den Bedarf an Trampolinen am Ende von Monat $i = 1, \ldots, 12$. Der Vektor $d = (d_i)$ sei wie folgt gegeben: $d = (30, 40, 20, 70, 80, 90, 100, 30, 150, 200, 150, 150)$. Trampoline, die in einem Monat produziert werden, können entweder am Ende dieses Monats ausgeliefert werden oder im Lager zur Auslieferung in einem späteren Monat gelagert werden. Die Lagerung eines Trampolins verursacht pro Monat Kosten von $c_1 = 1000$ ATS. Zu Beginn des Jahres ist das Lager leer. Am Ende des Jahres muß das Lager ebenfalls wieder geleert sein. Weiters fallen in der Produktion Mengenanpassungskosten an, im Übergang zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Monaten. Diese Kosten berechnen sich wie folgt: Jede Anpassung der produzierten Menge nach oben oder unten verursacht pro Trampolin in der Über- oder Unterzahl Anpassungskosten von $c_2 = 400$ ATS. Ziel ist es, einen Produktions- und Lagerplan zu erstellen, der gewährleistet, daß die Gesamtkosten (Lagerkosten plus Produktionsanpassungskosten) minimiert werden.

19. Gegeben seien folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

    (a) $M_1 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \le 1, |x_2| \le 1, |x_3| \le 1 \,\}$.
    (b) $M_2 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le 1 \,\}$.
    (c) $M_3 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1 \,\}$.
    (d) $M_4 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \le |x_2| \le |x_3| \le 1$.

    Für welche dieser Mengen läßt sich eine Matrix A und ein Vektor b finden, sodaß die jeweilige Menge als $Ax \le b$ beschrieben werden kann? (Geben Sie in jedem einzelnen Fall entweder eine solche Matrix und einen solchen Vektor an oder begründen Sie deren Nicht-Existenz.)

20. Welche der folgende Optimierungsprobleme können als lineare Programme formuliert werden? (Gemeint ist hier, daß man die Aufgabenstellungen mit Hilfe eines linearen Programms lösen kann. Die Lösung ist hier aber nicht gefragt.)

    (a)
$$\begin{array}{ll} \min & \max\{z_1, z_2, z_3\} \\ \text{unter} & \begin{array}{rcl} z_1 + z_2 + z_3 & = & 5 \\ z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 & \le & 4 \\ z_1, z_2 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

    (b)
$$\begin{array}{ll} \max & 3\,z_1 + 2\,z_2 + 4\,z_3 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcl} |\,z_1 + z_2 + z_3\,| & \le & 5 \\ z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 & \le & 4 \\ z_1 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

    (c)
$$\begin{array}{ll} \max & 3\,z_1 + 2\,z_2 + 4\,z_3 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcl} |\,z_1 + z_2 + z_3\,| & = & 2 \\ z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 & \le & 4 \\ z_1 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

    (d)
$$\begin{array}{ll} \min & |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ \text{unter} & \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & \le & 5 \\ x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 & \le & 4 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} & & \end{array} \end{array}$$

    (e)
$$\begin{array}{ll} \min & 4 + |\,8\,x_1 - 2\,| + |\,x_1\,| \\ \text{unter} & \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & \le & 5 \\ x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 & \le & 4 \\ x_2, x_3 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

    (f)
$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - |x_2| + |x_3| \\ \text{unter} & \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & \le & 5 \\ x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 & \le & 4 \\ x_1 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

    (g)
$$\begin{array}{ll} \max & 3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 6\,x_4 - x_5 - 2\,x_6 + 4\,x_7 \\ \text{unter} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \le 1/2 \\ & \max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \le \min\{x_5, x_6, x_7\} \\ & 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \le 1 \end{array}$$

    (h)
$$\begin{array}{ll} \max & 3\,x_1 - 5\,x_2 + 4\,x_3 \\ \text{unter} & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 10 \\ & |x_1 - 3x_2| \le 5 \\ & \dfrac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2} \le 4 \\ & 1 \le x_1 \le 5 \\ & x_2 \ge 0 \end{array}$$

21. Betrachten Sie das lineare Programm

$$\begin{array}{rrrl} \text{maximiere} & x_1+ & x_2 & \\ \text{unter} & sx_1+ & tx_2 & \leq 1 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Für welche Werte der Parameter s und t

(a) hat es eine Optimallösung?
(b) hat es eine eindeutige Optimallösung?
(c) ist es unzulässig?
(d) ist es unbeschränkt?

22. Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform der Form $\max c^t x$ unter $Ax \leq b$, $x \geq 0$ sowie das folgende zugehörige Tableau mit der Basis $B = (x_3, x_4, x_6)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & x_1 & x_2 & x_5 & \\ 10 & c_1 & c_2 & 0 & \\ \hline b_1 & 4 & a_1 & a_2 & x_3 \\ 2 & -1 & -5 & -1 & x_4 \\ 3 & a_3 & -3 & -4 & x_6 \end{array}$$

Für welche Wahl der Parameter a_1, a_2, a_3, b_1, c_1 und c_2 gelten die folgenden Aussagen?

(a) B ist nicht primal zulässig.
(b) B ist primal zulässig, aber entartet.
(c) B ist primal zulässig, aber nicht optimal.
(d) B ist optimal.
(e) B ist primal zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung.
(f) B ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig?
(g) B ist zulässig, aber durch Austausch der Basisvariablen x_6 gegen x_1 ergäbe sich eine Verbesserung?
(h) Wird x_2 in die Basis aufgenommen und x_3 im Gegenzug aus der Basis entfernt, so erhält man eine neue zulässige Basis mit einem Zielfunktionswert < 10.

23. Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform der Form $\max c^t x$ unter $Ax \leq b$, $x \geq 0$ sowie das folgende zugehörige Tableau mit der Basis $B = (x_5, x_6, x_7)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 0 & \delta & -3 & \gamma & \varepsilon & \\ \hline \beta & \alpha & 1 & 0 & 3 & x_5 \\ 2 & -2 & 2 & \varphi & -1 & x_6 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 1 & x_7 \end{array}$$

Für welche Wahl der Parameter α, β, γ, δ, ε und φ gelten die folgenden Aussagen?

(a) B ist zulässig.
(b) B ist primal zulässig, aber entartet.
(c) B ist primal zulässig, aber nicht optimal.

(d) B ist optimal.

(e) B ist primal zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung.

(f) B ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig.

(g) B ist zulässig, aber durch Austausch der Basisvariablen x_7 gegen x_3 ergäbe sich eine Verbesserung.

24. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Für wahre Aussagen ist ein Beweis anzugeben und für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel.

 (a) Gegeben sei ein lineares Programm mit redundanten Restriktionen. Das lineare Programm, das durch Wegwerfen aller redundanten Restriktionen resultiert, ist äquivalent zum ursprünglichen Problem. (Eine Restriktion wird als redundant bezeichnet, wenn das lineare Programm, das sich durch Weglassen dieser einen Restriktion ergibt, äquivalent zum Ausgangsproblem ist.)

 (b) Gegeben sei ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen (Vorzeichenbedingungen werden hier nicht mitgezählt), einer Gleichungsrestriktion und n Variablen. Dieses lineare Programm läßt sich stets in ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen und $n-1$ Variablen überführen (indem eine Variable aus der Gleichung ermittelt und in das Restproblem eingesetzt wird).

 (c) Gegeben sei ein lineares Programm P in 2 Variablen, das eine degenerierte Basislösung besitzt. Dann beinhaltet P eine redundante Restriktion.

 (d) Die Maximierung der Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 < 0 \\ 4x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

 läßt sich mit Hilfe einer linearen Formulierung in ein lineares Programm integrieren.

 (e) Analog zu Aufgabe 24d für die Minimierung dieser Zielfunktion.

25. Die Koeffizientenmatrix A und der rechte Seiten Vektor b eines linearen Programms seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

 Bestimmen Sie zunächst die Basislösung, die der Basis $B = \{1, 2, 3\}$ entspricht. Bestimmen Sie danach ausgehend von dieser Basislösung durch Pivotoperationen die restlichen Basislösungen.

26. Die Koeffizientenmatrix A und der rechte Seiten Vektor b eines linearen Programms seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

 Zeigen Sie, daß die ersten drei Spalten von A eine Basislösung von $Ax = b$ liefern. Bestimmen Sie durch Pivotoperationen die restlichen Basislösungen, und prüfen Sie, welche davon entartet, bzw. zulässig sind für das System $\{\, x : Ax = b, x \geq 0 \,\}$.

27. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Wenn das lineare Programm in Standardform

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & \sum_{j=1}^n c_j x_j & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq & b_j & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist, dann gibt es einen Index k, für den das lineare Programm

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & x_k & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq & b_j & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist. Gilt auch die umgekehrte Folgerung?

28. Folgendes Tableau ergab sich als Zwischenstufe bei der Lösung von $\min c^t x$ unter $Ax = b, x \geq 0$ mit Hilfe der Simplexmethode:

		x_2	x_3	x_5
	-8	8/3	-11	4/3
x_1	4	2/3	0	4/3
x_4	2	-7/3	3	-2/3
x_6	2	-2/3	-2	2/3

$B = \{1, 4, 6\}$ ist die augenblickliche Basis.

(a) Drücken Sie die augenblicklichen Nichtbasisvariablen, die Zielfunktion und die Nebenbedingungen durch die augenblicklichen Basisvariablen aus.

(b) Welche Pivotoperation muß als nächstes folgen?

(c) Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Problem, falls folgendes noch bekannt ist:

$$c_1 = 1 \qquad c_4 = 3 \qquad A_B^{-1} = (a_1, a_4, a_6)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

29. Lösen Sie das lineare Programm $\max c^t x$ unter $Ax \leq b,\ x \geq 0$ mit

$$c^t = (2\ 4\ 1\ 1), \quad b^t = (4\ 3\ 3), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

30. Lösen Sie folgendes lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & & & \geq & 0 \end{array}$$