

# Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2008

1. **Mischungsproblem:** Ein Ernährungswissenschaftler in einem Forschungsinstitut für Nahrungsmittel möchte ein neues Mehrkornmehl entwickeln. Es stehen vier Ausgangskorn Typen zur Verfügung, aus denen das neue Mehl gemischt werden soll. Diese vier Typen zeichnen sich durch die folgenden Charakteristika aus:

	% im Korn v. Typ			
	1	2	3	4
Stärke	30	20	40	25
Faseranteile	40	65	35	40
Eiweiß	20	15	5	30
Gluten	10	0	20	5
Kosten (\$ pro kg)	7	4	6	8

Bei der Zusammenstellung des neuen Mehles ist auf die Einhaltung der folgenden Vorschriften zu achten:

- Aus geschmacklichen Gründen darf der Anteil des 2. Korn Types 20% nicht überschreiten. Ferner hat der Anteil des 3. Types mindestens 30% zu betragen und der Anteil des 1. Typs hat zwischen 10% und 25% zu liegen.
- Der Eiweißgehalt des neuen Mehles hat mindestens 18% zu betragen. Der Glutengehalt muß zwischen 8% und 13% betragen und der Faseranteil darf maximal 50% ausmachen.

Modellieren Sie die Aufgabe, aus den vier gegebenen Korn Typen ein neues Mehl unter Beachtung der obigen Vorschriften mit dem Ziel der Kostenminimierung zu mischen, als lineares Programm.

2. Eine Softwarefirma vertreibt Programmpakete anderer Hersteller und kann für maximal 1,5 Millionen ATS Programme einkaufen. Zur Installation und Wartung können maximal 10 Mitarbeiter herangezogen werden. Programmpaket A kostet beim Einkauf 160.000 ATS, Paket B 150.000 ATS, Paket C 200.000 ATS und Paket D 300.000 ATS. Für den Einsatz von A,B,C bzw. D werden 1,4,1 bzw. 2 Mitarbeiter benötigt. Der (Weiter-)Verkauf von A,B,C bzw. D bringt der Firma einen Gewinn von 40.000 ATS, 60.000 ATS, 80.000 ATS bzw. 140.000 ATS. Modellieren Sie die Aufgabe der Maximierung des Gesamtgewinns als lineares Programm.
3. Eine Genossenschaft verfügt über 1000 Quadratkilometer Ackerland, die für den Anbau von Weizen, Roggen und Sojabohnen zur Verfügung stehen. Die Bewirtschaftung der Felder verlangt den Einsatz der nur begrenzt vorliegenden Ressourcen Wasser, Arbeitskraft und Geld. Maximal stehen 2000 Kubikmeter Wasser, 8000 Arbeitsstunden sowie 20000 \$ an Budget zur Verfügung. Ferner sind folgende Randbedingungen zu beachten:
- Pro  $\text{km}^2$  an Land können 10t Roggen, 4t Weizen bzw. 6t Sojabohnen angebaut werden.
  - Pro  $\text{km}^2$  an Land benötigt man für Roggen 3 l Wasser, für Weizen 1 l und für Sojabohnen 2 l.
  - Die Bebauung mit Roggen kostet pro  $\text{km}^2$  15 \$, mit Weizen 10 \$ und mit Sojabohnen 12 \$.
  - Die Bebauung mit Roggen erfordert pro  $\text{km}^2$  8 Arbeitsstunden, jene mit Weizen 6 und jene mit Sojabohnen 10.
  - Der Profit pro produzierter Tonne beträgt für Roggen 10 \$, für Weizen 6 \$ und für Sojabohnen 8 \$.

Modellieren Sie die Aufgabe einen Bebauplan zu finden, der den Profit maximiert und alle Bedingungen einhält, als lineares Programm.

4. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als lineares Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):  
 Ein Frachtflugzeug hat drei Abteile zur Lagerung des Frachtgutes: vorne, in der Mitte und hinten. Für die Abteile sind sowohl hinsichtlich des zulässigen Gewichts als auch hinsichtlich des Laderaums Höchstgrenzen zu beachten (diese sind der folgenden Tabelle zu entnehmen):

Abteil	Gewichtslimit (in t)	Laderaumlimit (in m <sup>3</sup> )
vorne	12	7000
mitte	18	9000
hinten	10	5000

Um das Gleichgewicht des Flugzeugs nicht zu gefährden, muß das Ladegewicht in den einzelnen Abteilen jeweils den gleichen Prozentsatz des maximal zulässigen Gewichts der Abteile betragen. Für den kommenden Flug stehen die folgenden vier Frachtladungen zum Transport bereit:

Fracht	Gewicht (in t)	Volumen (in m <sup>3</sup> /t)	Gewinn (in DM/t)
1	20	500	280
2	16	700	360
3	25	600	320
4	13	400	250

Die vier Ladungen können in beliebigen Teilladungen befördert werden. Welche Menge dieser vier Frachten sollte transportiert werden und wie sollten diese Mengen auf die Abteile verteilt werden, wenn der Gesamtgewinn des Flugs maximiert werden soll?

5. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als lineares Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):  
 Die Firma B&D erzeugt Bohrmaschinen für Heimwerker. Die wesentlichen Bestandteile eines solchen Bohrers sind der Motor sowie das Gehäuse. Die vier verschiedenen Typen, die am Markt angeboten werden, unterscheiden sich in der Größe des Motors bzw. des Gehäuses sowie im Material des Gehäuses. Die Modelle 1 und 2 besitzen Gehäuse, die sich aus mehreren Metallkomponenten (Kupferlegierung) zusammensetzen, während die Gehäuse der Modelle 3 und 4 aus Kunststoff gefertigt werden. Für die nächsten Monate ist eine Knappheit an Kupfer vorhergesagt. Kupfer wird sowohl für die Metallgehäuse als auch für den Draht, der in den Motoren Verwendungen findet, benötigt. Die Firma B&D möchte daher die Produktion für die nächsten Monate planen.

Die untenstehende Tabelle gibt Aufschluß über den Ressourcenbedarf:

	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4
Kunststoffbedarf (in kg)	0,82	0,62	1,42	2,03
Bedarf an Kupferlegierung für Gehäuse (in kg)	0,43	0,69	0,33	0,20
Bedarf an Draht für Motor (in m)	15	16	9	9

Es ist bekannt, daß in der nächsten Planungsperiode maximal 16000 kg an Kunststoff und maximal 5000 kg der benötigten Kupferlegierung zur Verfügung stehen. Der für die Motoren benötigte Draht kann aus 2 Quellen stammen. Zum einen existiert eine interne Produktionsmöglichkeit zu Kosten von 14 ATS pro m, wobei die maschinelle Kapazität eine Maximalproduktionsmenge von 80000 m gestattet. Zum anderen kann Draht in unbegrenzter Menge zu Kosten von 36 ATS pro m von

einem externen Anbieter gekauft werden. Zur internen Herstellung von 100m Draht werden 3.6 kg Kupferlegierung verbraucht. Zu Beginn der Planungsperiode sind noch 8000 m Draht auf Lager. Die anderen Rohstoffe, die zur Endfertigung benötigt werden, sind jederzeit lieferbar und nahezu unbegrenzt erhältlich. Aus diesem Grund können diese in den Planungsüberlegungen vernachlässigt werden.

Das Management von B&D ist davon überzeugt, alle produzierten Bohrmaschinen auch absetzen zu können, allerdings darf aus Marketinggründen die Zahl der gefertigten Maschinen neueren Typs (Modelle 3 und 4) die Zahl jener älteren Typs (Modelle 1 und 2) nicht überschreiten.

Ziel der Firma ist es, den Gesamtprofit zu maximieren. Der Profit pro abgesetzter Maschine des Modells 1 beträgt 1250 ATS, 1130 ATS für Modell 2, 1720 ATS für Modell 3 und 1990 ATS für Modell 4 (in diesen Zahlen sind die Produktionskosten, mit Ausnahme der Kosten für den Draht, der für den Motor benötigt wird und aus verschiedenen Quellen kommen kann, bereits berücksichtigt).

6. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als lineares Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):

Das Produkt "Wisch-und-weg" kann in drei Größen produziert werden: klein, mittel und groß. Der Nettprofit pro erzeugtem und abgesetztem Stück beträgt 9 ATS für die Größengruppe klein, 10 ATS für mittel und 12 ATS für groß. Die Produktionsfirma weist 3 Fabriken auf. Fabrik 1 hat eine tägliche Produktionskapazität von insgesamt 550 Stück, Fabrik 2 von 750 Stück und Fabrik 3 von 275 Stück. (Diese Kapazität hängt nicht davon ab, wieviele Stück in welcher Größengruppe produziert werden.) Im Rahmen des Produktionsprozesses wird zur Kühlung Wasser benötigt. Die Produktion pro Stück der Größengruppe klein erfordert 9 l Wasser, für mittel 17 l Wasser und für groß 21 l Wasser. In Fabrik 1 sind pro Tag maximal 10000 l Wasser zur Verfügung, in Fabrik 2 maximal 7000 l und in Fabrik 3 maximal 4200 l Wasser. Aus Marktstudien ist bekannt, daß sich pro Tag maximal 450 Stück der Größengruppe klein, 900 Stück von mittel und 700 Stück von groß absetzen lassen. Aus internen Unternehmensgründen ist es erwünscht, daß die relative Auslastung aller drei Fabriken (=produzierte Zahl pro Tag/maximal produzierbare Zahl pro Tag) gleich ist. Gesucht ist ein Produktionsplan, der den Gesamtprofit maximiert.

7. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als lineares Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):

Ein Produzent von Fleischwaren hat einen Großauftrag einer Hotelkette bekommen, der die Lieferung von 10000 kg Fleischkäse umfaßt. Der Fleischkäse wird aus den vier Bestandteilen: Rindfleisch, Kalbfleisch, Schweinefleisch und Sojabohnenpaste erzeugt. Bei der Herstellung sind die folgenden Einschränkungen zu beachten:

- Der Gehalt an Rindfleisch muß sich bezogen auf das Gesamtgewicht zwischen 40% und 60% bewegen.
- Der Gehalt an Schweinefleisch muß sich bezogen auf das Gesamtgewicht zwischen 20% und 30% bewegen.
- Der Gehalt an Kalbfleisch muß sich bezogen auf das Gesamtgewicht zwischen 10% und 40% bewegen.
- Der Gehalt an Schweinefleisch darf 1.5 mal den Gehalt an Kalbfleisch nicht überschreiten.
- Der Fleischkäse muß einen Proteingehalt von mindestens 30% aufweisen und darf maximal einen Fettgehalt von 12% besitzen. (Die Protein- und Fettgehalte der einzelnen Bestandteile sind der untenigen Tabelle zu entnehmen.)

	Fettgehalt (in %)	Proteingehalt (in %)	Kosten pro kg (in ATS)
Rindfleisch	12	28	7
Schweinefleisch	15	29	6
Kalbfleisch	10	27	8
Sojapaste	8	36	12

Ziel der Firma ist es den Gesamtprofit zu maximieren, d.h. die Produktionskosten zu minimieren. Die Kosten für die vier Grundkomponenten sind der obigen Tabelle zu entnehmen.

8. **Verschnittminimierung:** Die Firma "Gaulberger" erzeugt Leichtmetallfenster. Für einen Großauftrag benötigt die Firma Stäbe in folgenden Längen und Stückzahlen.

Stab	Länge (cm)	Stück
A	181	18
B	174	150
C	155	10
D	134	100

Als Rohmaterial stehen nur Stäbe in einer Länge von 6 Metern zur Verfügung. Modellieren Sie die Aufgabe die Minimalanzahl an 6 Meter Stäben, die für den Auftrag notwendig sind, zu ermitteln als lineares Programm.

Wie ändert sich das Modell, falls in der Firma noch 10 Stäbe mit 3.2 Metern Länge verfügbar sind?

9. **Personaleinsatzplanung:** Ein Postamt benötigt an verschiedenen Wochentagen eine unterschiedliche Anzahl von Postbeamten. Langjährige Beobachtungen ergaben folgenden Bedarf.

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
17	13	15	19	14	16	11

Kollektivvertragliche Regelungen erfordern, daß jeder Angestellte 5 Tage arbeitet, und die zwei darauffolgenden Tage frei hat.

- Erstellen Sie ein Modell, mit dem ermittelt werden kann, wieviele Angestellte mindestens notwendig sind, um den Betrieb aufrechtzuerhalten.
  - Angenommen, das Postamt verfügt über 25 Beamte und es können weder Neueinstellungen noch Kündigungen vorgenommen werden. Formulieren Sie das Problem, unter den gegebenen Bedingungen einen Arbeitsplan zu bestimmen, bei dem möglichst viele Beamte einen Wochentag (Samstag, Sonntag) frei haben, als lineares Programm.
  - Angenommen, es besteht die Möglichkeit von seiten der Postdirektion, einen kleinen Anteil der Beschäftigten zu veranlassen, auf einen freien Tag zu verzichten, und 6 Tage hintereinander zu arbeiten. Dabei werden für die ersten fünf Tage jeweils S 1000/ Tag und am sechsten Tag S 1400 bezahlt. Es können allerdings aufgrund einer gewerkschaftlichen Übereinkunft höchstens 20 % aller Beschäftigten für die Aufgabe eines freien Tages veranlasst werden. Wie ändert sich dann das Modell?
10. Gegeben sei eine Zufallsvariable  $Y$ , die die Werte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  annehmen kann. Wir wissen, daß  $Y$  entweder die Verteilung 1 besitzt, wobei

$$P(Y = a_i) = p_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gilt oder die Verteilung 2 wobei dann

$$P(Y = a_i) = q_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gilt. Es gilt  $0 \leq p_i, q_i \leq 1$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$ . Basierend auf einer einzigen Beobachtung von  $Y$  möchten wir raten, welche der beiden Verteilungen vorliegt. D.h., für jede mögliche Realisierung  $a_j$  von  $Y$  entscheiden wir mit einer Wahrscheinlichkeit von  $x_j$ , daß  $Y$  entsprechend der ersten Verteilung verteilt ist und mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - x_j$ , daß die zweite Verteilung vorliegt. Ziel ist es, die Ratewahrscheinlichkeiten  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , so zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß in Wirklichkeit Verteilung 2 vorliegt, wenn wir uns auf Verteilung 1 festlegen, nicht größer als eine gegebene Schranke von  $\beta < 1$  ist. Unter Einhaltung dieser Bedingung sollen die  $x_j$  so bestimmt werden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß tatsächlich Verteilung 1 vorliegt, wenn wir uns auf Verteilung 1 festlegen, maximiert wird.

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

11. Eine kleine Fluggesellschaft, Carinthian Panthers, fliegt die 3 Flughäfen Klagenfurt, Graz-Thalerhof und Wien Schwechat an. Wir interessieren uns in der Folge für den Freitag Nachmittag Flug, der in Wien startet, in Graz einen Zwischenstopp einlegt und in Klagenfurt endet. Es gibt drei Typen von Passagieren:

- Jene Passagiere, die von Wien nach Graz wollen (eine sehr gute Idee).
- Jene Passagiere, die von Graz nach Klagenfurt wollen (Gott weiß warum).
- Jene Passagiere, die von Wien nach Klagenfurt wollen (es hängt wohl davon ab, welche Bekanntschaften man hat).

Das verwendete Flugzeug ist ein Propellerflugzeug mit 30 Sitzplätzen. Die Fluggesellschaft bietet die folgenden drei Tarife an:

- Klasse Y: Normalpreis.
- Klasse B: Ticketpreis nicht refundierbar bei Umbuchung oder Stornierung.
- Klasse M: Ticketpreis nicht refundierbar bei Umbuchung oder Stornierung, Ticket muß 3 Wochen im vorhinein gekauft werden.

Die Ticketpreise (in ATS), die im wesentlichen von äußeren Einflüssen abhängig sind (z.B. Konkurrenzsituation), wurden zu Saisonbeginn wie folgt festgelegt:

	Wien–Graz	Graz–Klagenfurt	Wien–Klagenfurt
Y	3000	1600	3600
B	2200	1300	2800
M	1000	800	1400

Basierend auf Erfahrungen aus der Vergangenheit haben die OR-Spezialisten von Carinthian Panthers folgende obere Schranken für die Anzahl potentieller Kunden für jede der 9 möglichen Start-Ziel/Flugklasse Kombinationen bestimmt:

	Wien–Graz	Graz–Klagenfurt	Wien–Klagenfurt
Y	4	8	3
B	8	13	10
M	22	20	18

Ziel der Flugesellschaft ist es, zu entscheiden, wieviele Tickets für jede der 9 möglichen Start-Ziel/Flugklasse Kombinationen verkauft werden sollen. Als Restriktion ist zu beachten, daß Überbuchungen auf keiner der beiden Teilstrecken erlaubt sind und daß die Anzahl der für eine Kombination angebotenen Tickets die von den OR-Experten festgelegte obere Schranke nicht überschreiten darf. Die obige Entscheidung soll unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung getroffen werden. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

12. Beim *Fahrradproblem* möchten  $n$  Personen, die über ein einziges einsitziges Fahrrad verfügen, einen 10 Kilometer langen Weg zurücklegen. Für jede Person  $j = 1, \dots, n$  ist die Gehgeschwindigkeit  $g_j$  und die Radfahrgeschwindigkeit  $f_j$  bekannt. Die Ankunftszeit der letzten ankommenden Person soll minimiert werden.

- (a) Versuchen Sie das Problem für  $n = 3, g_1 = 4, g_2 = g_3 = 2, f_1 = 16, f_2 = f_3 = 12$  zu lösen. (Geschwindigkeiten in km/h).
- (b) Zeigen Sie, dass der Optimalwert des folgenden linearen Programms eine untere Schranke für den Optimalwert des Fahrradproblems liefert:

$$\begin{aligned} & \text{minimiere} && t \\ & \text{unter} && t - x_j - x'_j - y_j - y'_j \geq 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n \\ & && t - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{j=1}^n y'_j \geq 0 \\ & && g_j x_j - g_j x'_j + f_j y_j - f_j y'_j = 10 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n \\ & && \sum_{j=1}^n f_j y_j - \sum_{j=1}^n f_j y'_j \leq 10 \\ & && x_j, x'_j, y_j, y'_j \geq 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Was bedeuten die Variablen  $x_j, x'_j, y_j, y'_j$ ?

- (c) (Zum Tüfteln) Finden Sie ein Beispiel, bei dem der Optimalwert des linearen Programms vom Optimalwert des Fahrradproblems verschieden ist.

13. **(Auswahl eines Portfolios)**

Ein Portfolio Manager einer Bank hat 10 Millionen \$ für Investitionen in Obligationen zur Verfügung. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die zur Auswahl stehenden Obligationen sowie deren Kenndaten:

Name	Typ	Bewertung von Moody	Bank	Jahre bis zum Laufzeitende	Rendite (in%)	Rendite nach Steuerabzug (in %)
A	Gemeinde	Aa	2	9	8,6	8,6
B	Agentur	Aa	2	15	10,8	5,4
C	Staat	Aaa	1	4	10,0	5,0
D	Staat	Aaa	1	3	8,8	4,4
E	Gemeinde	Ba	5	2	9,0	9,0

Gemäß der Vorgaben seiner Vorgesetzten hat der Manager folgende Rahmenbedingungen bei der Auswahl eines Portfolios zu berücksichtigen:

- In Obligationen vom Typ Gemeinde dürfen maximal 3 Millionen \$ investiert werden.
- Der durchschnittliche Qualitätsbewertungswert des Portfolios nach der Skala von Bank darf den Wert 1,4 nicht überschreiten. (Niedrige Werte bedeuten hohe Qualität auf dieser Skala.)

- Die durchschnittliche verbleibende Laufzeit bis zum Laufzeitende darf 5 Jahre nicht überschreiten.

(Hinweis: In den letzten beiden Restriktionen ist die jeweils investierte Summe zu berücksichtigen und in Relation zur insgesamt investierten Summe zu setzen.)

- Angenommen, die Obligationen werden “at par” gekauft und bis zum Ende der Laufzeit behalten. Formulieren Sie das Problem, ein Portfolio auszuwählen, das die obigen Einschränkungen erfüllt und das den Gesamtgewinn nach Steuerabzug maximiert, als lineares Programm. (Der Steuersatz beträgt 50%, aber die Gewinne aus kommunalen Obligationen sind steuerfrei.)
- Wie verändert sich das lineare Programm in (13a), wenn der Manager einen Kredit für bis zu 1 Million \$ aufnehmen darf, für den der Zinssatz 11% vor Steuerabzug beträgt. (Effektiv führt dies zu einem Zinssatz von 5,5% mit dem der Manager rechnen muß.)

#### 14. (Kraftwerkseinsatzplanung)

Zur Stromversorgung einer Stadt stehen ein Grundlastkraftwerk  $G$  und ein Spitzenlastkraftwerk  $S$  zur Verfügung. Der Preis des von  $G$  gelieferten Stroms betrage  $c_g$  Geldeinheiten (GE) pro kWh und jener des von  $S$  gelieferten Stroms betrage  $c_s$ . Der Strombedarf in der  $i$ -ten Stunde sei  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, 24$ . Die Stromlieferung  $x_0$  von  $G$  hat über alle 24 Stunden konstant zu bleiben, die Stromlieferung von  $S$  kann stündlich variieren.

- Stellen Sie ein lineares Programm auf, das zum Ziel hat, den Strombedarf zu decken und die Stromkosten zu minimieren.
- Geben Sie Bedingungen für die Preise  $c_g$  und  $c_s$  an, sodaß die Lösung mit  $x_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 24$ , (d.h. das Spitzenlastkraftwerk wird nicht verwendet) und  $x_0 = \max_{i=1, \dots, 24} b_i$  eine Optimallösung des linearen Programms aus (14a) darstellt.

15. Ein Whiskyimporteur importiert die drei Whiskymarken Sir Roses, Highland Wind bzw. Old Frenzy. Der Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber aufgrund von Importeinschränkungen sind seine monatlichen Einkaufsmengen wie folgt begrenzt:

- Es können maximal 2000 Flaschen Sir Roses importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 350 ATS.
- Es können maximal 2500 Flaschen Highland Wind importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 250 ATS.
- Es können maximal 1200 Flaschen Old Frenzy importiert werden. Der Einkaufspreis pro Flasche beträgt 200 ATS.

Aus diesen drei Whiskymarken stellt der Importeur drei Mischungen A, B bzw. C her, die er zu 340 ATS, 285 ATS bzw. 225 ATS verkauft. Die Mischungen haben folgenden Bedingungen genügezu leisten:

- Die Mischung A muß mindestens 60% von der Marke Sir Roses enthalten und darf maximal 20% von der Marke Old Frenzy enthalten.
- Die Mischung B muß mindestens 15% von der Marke Sir Roses enthalten und darf maximal 60% von der Marke Old Frenzy enthalten
- Die Mischung C darf höchstens 50% von der Marke Old Frenzy enthalten.

Stellen Sie ein lineares Programm auf, das dem Importeur hilft herauszufinden, wie er beim Einkauf und der Herstellung der Mischungen vorzugehen hat, wenn er seinen Gewinn maximieren möchte.

## 16. (Transportproblem)

Eine landwirtschaftliche Genossenschaft kauft Weizen bei den umliegenden Landwirten ein. Zur Bearbeitung des Weizens (Produktion von Mehl) stehen zwei Mühlen zur Verfügung. Das in den Mühlen produzierte Mehl wird in drei Märkten abgesetzt. Jeder dieser Märkte besitzt ein zentrales Warenlager, an das das in diesem Markt abzusetzende Mehl zu liefern ist.

Die Genossenschaft hat 50000 Scheffel Weizen aufgekauft. Im Markt A (Nordburg) besteht ein Bedarf an 10000 Scheffel Mehl, im Markt B (Mittelburg) besteht ein Bedarf an 15000 Scheffel Mehl und im Markt C (Südburg) ein Bedarf an 25000 Scheffel Mehl. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß in den Mühlen aus einem Scheffel Weizen genau ein Scheffel Mehl produziert wird. (Dies kann immer erreicht werden, wenn man die Mengeneinheiten für Weizen und Mehl geeignet definiert.) Die Mahlkosten pro Scheffel Weizen in Mühle 1 betragen 1,3 ATS und jene in Mühle 2 betragen 1,6 ATS. Die Transportkosten von der Genossenschaft zu Mühle 1 bzw. zu Mühle 2 betragen 3,1 ATS bzw. 3,3 ATS pro transportiertem Scheffel Weizen. Die Transportkosten von den Mühlen zu den Absatzmärkten (in ATS pro transportiertem Scheffel Mehl) sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Nordburg	Mittelburg	Südburg
Mühle 1	1,8	2,2	2,7
Mühle 2	2,5	2,3	1,9

Das Ziel der Genossenschaft ist es, den vorrätigen Weizen derart zu den Mühlen und das dort produzierte Mehl zu den Lagerhäusern der Absatzmärkte zu transportieren, daß der Bedarf jedes Absatzmarktes genau erfüllt wird und die Summe der Transport- und Produktionskosten (in den Mühlen) minimiert wird.

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

17. Die Modellbaufirma Jungenträume stellt zwei Modellbausätze für Modellautos her. Im Lager befinden sich zur Zeit die folgenden Einzelkomponenten: 215 Motoren, 525 Achsen, 440 Blöcke aus Balsa Holz sowie 560 Farbpakete. Für den Bausatz 1 werden 2 Motoren, 3 Achsen, 4 Balsa Blöcke und 2 Farbpakete benötigt. Für den Bausatz 2 werden 1 Motor, 2 Achsen, 2 Balsa Blöcke und 3 Farbpakete benötigt. Der Verkauf von Bausatz 1 resultiert in einen Gewinn von 15 \$ pro Bausatz und der Verkauf von Bausatz 2 in einen Gewinn von 9,5 \$ pro Bausatz. Ziel der Firma ist es, unter Ausnützung der im Lager vorhanden Komponenten eine entsprechende Anzahl von Bausätzen der beiden Typen zu produzieren sodaß der Gewinn für die Firma maximiert wird.

- (a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.
- (b) Angenommen, es zeigte sich in den vergangenen Monaten, daß der Absatz der Bausätze sehr schleppend vorsichgeht. Der Großmarkt Superbillig bietet der Firma Jungenträume nun an, den Verkauf der von der Firma Jungenträume aus den Lagerbeständen zusammengestellten Bausätze unter der folgenden Voraussetzung zu übernehmen: Die Firma Jungenträume muß sich verpflichten, die 60 übersteigende Zahl an Bausätzen des Typs 1 zu einem um 5\$ pro Bausatz reduzierten Preis und die 50 übersteigende Zahl an Bausätzen des Typs 2 zu einem um 3\$ pro Bausatz reduzierten Preis dem Markt Superbillig zur Verfügung zu stellen. Wie verändert sich das lineare Programm aus (17a) unter diesen Umständen? (Das Ziel der Firma Jungenträume bleibt nachwievor gleich. Es soll der Gewinn maximiert werden.)