88. Die Fluggesellschaft "Glückliches Österreich (GÖ)" bietet täglich 6 Flüge von Graz nach Wien an. Von 10 Uhr bis 20 Uhr startet alle 2 Stunden ein Flugzeug. Die ersten 3 Flüge werden mit einer Maschine abgewickelt, die 100 Passagiere aufnehmen kann, und die restlichen 3 Flüge mit einer Maschine mit einer Kapazität von 150 Passagieren. Falls Überbuchung dazu führt, daß einzelne Passagiere keinen Platz mehr für den gewünschten Flug bekommen, können sie durch Zahlung einer Kompensation von 2000 ATS plus 200 ATS pro Stunde an Verschiebung ihres Flugs auf einen späteren Flug vertröstet werden. Fluggäste, die im 20 Uhr Flug keinen Platz mehr finden, können von GÖ einer Tochtergesellschaft vermittelt werden, die um 23 Uhr einen Flug anbietet, der in jedem Fall ausreichend Kapazität zur Verfügung stellt. Angenommen für den nächsten Tag liege die folgende Buchungssituation für die sechs Flüge von GÖ vor (in zeitlicher Reihenfolge): 110, 160, 103, 149, 175 und 140 Passagiere. Es wird angenommen, daß es nur eine Buchungsklasse gibt und daß alle Flüge zum selben Grundtarif angeboten werden.

89. Gegeben sei ungerichteter vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten c_{ij}, $(i, j) \in E$. Ferner sei ein Knoten $s \in V$, der sogenannte Zentralknoten, und eine ganze Zahl R gegeben. Für jeden Knoten $i \in V \setminus \{s\}$ sei eine nichtnegative ganze Zahl r_i, der Bedarf von i, gegeben. Gesucht wird ein spannender Baum T mit minimalen Gesamtkosten (=Summe der Kantenkosten), sodaß folgende Bedingung erfüllt ist: Wenn vom Zentralknoten s entlang der Kanten von T eine solche Menge von Fluß zu den übrigen Knoten verschickt wird, daß in jedem Knoten i der Bedarf r_i erfüllt wird, dann überschreitet auf keiner Kante die geschickte Flußmenge den Wert R.

    Formulieren Sie dieses Problem als Flußproblem für den Spezialfall $r_i \in \{0, 1\}$. Funktioniert dieser Ansatz auch für den allgemeinen Fall? Warum? Warum nicht?

90. Gegeben sei ein minimales Kostenflußproblem. Eine Kante $(i, j) \in E$ heißt *kritisch*, wenn das Vergrößern bzw. Verringern der Kosten c_{ij}, das Vergrößern bzw. das Verringern des optimalen Zielfunktionswerts (der Kosten eines kostenminimalen Flusses) verursacht.

    (a) Besitzt jedes Netzwerk eine kritische Kante?

    (b) Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus zur Bestimmung alle kritischen Kanten.

91. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit Kantenkapazitäten $u_{ij} \in \mathbb{R}_0^+$, $(i, j) \in A$, Kantenkosten $c_{ij} \in \mathbb{R}_0^+$, $(i, j) \in A$ und eine Quelle $s \in V$ und eine Senke $t \in V$. (Wir nehmen an, daß $c(P) > 0$ für jeden gerichteten Weg P von s nach t gilt.) Ferner sei eine Zahl $B \in \mathbb{R}^+$, das Budget gegeben.

    Gesucht ist ein Fluß von s nach t in G, der unter allen Flüssen, deren Gesamtkosten $\sum_{(i,j)\in E} x_{ij}c_{ij}$ den Wert B nicht überschreiten, maximalen Wert aufweist.

    Stellen Sie eine Beziehung zwischen diesem Problem und einem geeignet gewählten minimalen Kostenflußproblem auf. Nützen Sie diesen Zusammenhang für die Entwicklung eines polynomialen Algorithmus zur Lösung des hier betrachteten Problems im Falle von ganzzahligen Kapazitäten und Kosten. (Hinweis: Binäre Suche.)

92. Das Kanten-Überdeckungsproblem (EDGE-COVER).

    Gegeben ist ein ungerichter Graph $G = (V, E)$ mit keinen isolierten Knoten (Knoten vom Grad 0).

    Gesucht ist eine Teilmenge $U \subseteq E$ von Kanten mit möglichst kleiner Kardinalität, sodaß jeder Knoten in V mit mindestens einer Kante in U inzident ist.

    (a) Gegeben sei eine Kantenüberdeckung U mit der kleinstmöglichen Zahl u von Kanten. Wie sehen die Komponenten des von U induzierten Teilgraphen von G aus? Welche Beziehung besteht zwischen u und der Anzahl der Komponenten?

    (b) Konstruieren Sie aus U ein Matching M mit $n - u$ Kanten.

(c) Konstruieren Sie aus einem Matching mit g Kanten auf einfache Art eine Kantenüberdeckung mit höchstens $n - g$ Kanten.

(d) Welche Beziehung besteht zwischen der kleinstmöglichen Anzahl u von Kanten in einer Kantenüberdeckung und der Kantenanzahl g eines Matchings mit maximaler Kardinalität?

93. Zeigen Sie, daß folgende Aussage gilt: Wenn das in der Vorlesung angebene naive Suchverfahren einen mit einem geraden (ungeraden) Status versehenen Knoten mit einem ungeraden (geraden) Status versehen möchte, dann ist der Graph nicht bipartit. Ist die Umkehrung der Aussage korrekt?

94. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Kantenfärbung in G ist eine Färbung der Kanten in E mit verschiedenen Farben, sodaß je zwei Kanten mit einem gemeinsamen Endknoten mit verschiedenen Farben gefärbt sind.

(a) Zeigen Sie, daß eine k-Färbung in G die Kantenmenge E in k paarweise disjunkte Matchings zerlegt.

(b) Der Graph G heißt k-regulär wenn $\text{Grad}(i) = k$ für alle $i \in V$ gilt. Zeigen Sie, daß ein k-regulärer bipartiter Graph eine k-Färbung besitzt.

(c) Sei $\delta(G)$ der maximale Grad der Knoten in V: $\delta(G) := \max\{\text{Grad}(i) : i \in v\}$. Zeigen sie, daß jeder bipartiter Graph G ein $\delta(G)$-Färbung besitzt.

95. Eine Menge von Knoten $V' \subseteq V$ heißt matchbar, wenn es ein Matching M gibt, das alle Knoten aus V' matcht. Zeigen Sie, daß es für jede matchbare Menge von Knoten $V' \subseteq V$, ein Matching M^* mit maximaler Kardinalität existiert, das alle Knoten aus V' matcht.

96. Sei G ein Graph und M ein Matching in G. Weiters sei B die Blüte bzgl. M in G. Bezeichne G^c den durch Kontraktion der Blüte B in G erhaltenen Graphen.

Professor May B. Right behauptet ein Gegenbeispiel zur folgenden Aussage gefunden zu haben: Der kontrahierte Graph G^c enthält dann und nur dann einen augmentierenden Weg P^c, wenn der ursprüngliche Graph G einen augmentierenden Weg enthält. Prof. Rights Beispiel wird in Abbildung 19 dargestellt. Der linke Teil der Abbildung 19 stellt den ursprünglichen Graphen G dar und der rechte den Graphen G^c nach der Kontraktion. (Die Matchingkanten sind jeweils fettgedruckt.) Die Knoten $2, 3, 5$ definieren eine Blüte in G. Der durch das Kontraktion der Blüte B erhaltene Graph G^c enthält keinen augmentierenden Weg, obwohl der ursprüngliche Graph G einen augmentierenden Weg enthält. Hat Prof. May B. Right ein Gegenbeispiel gefunden, oder hat sie einen Fehler gemacht und wenn ja, welchen?

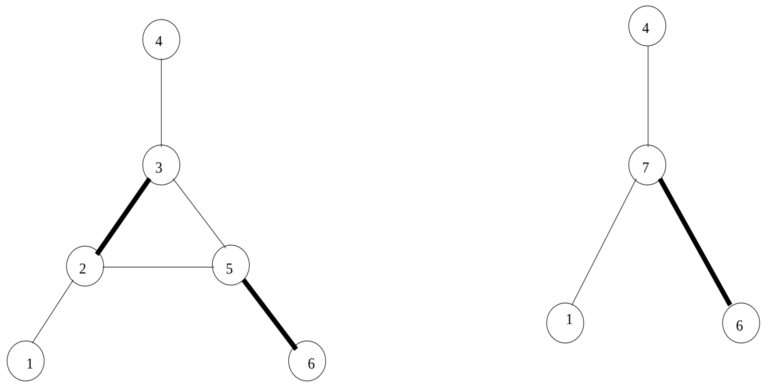

Abbildung 19

97. Bestimmen Sie im Graphen aus Abbildung 20 ein Matching maximaler Kardinalität. Verwenden Sie die fettgedruckt dargestellte Kantenmenge als Ausgangsmatching.

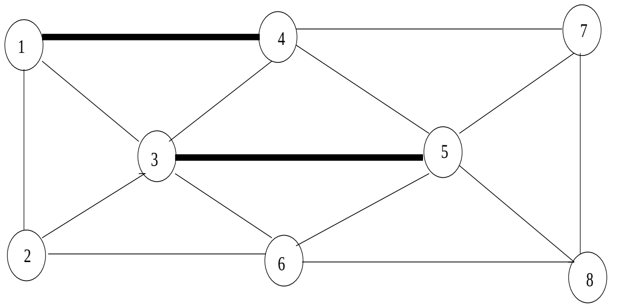

Abbildung 20

98. Gegeben sei der bipartite Graph aus Abbildung 21. Bestimmen Sie ein Matching maximaler Kardinalität durch

    (a) Tranformation in ein maximales Flußproblem,

    (b) Anwendung des Matching Algorithmus aus der Vorlesung.

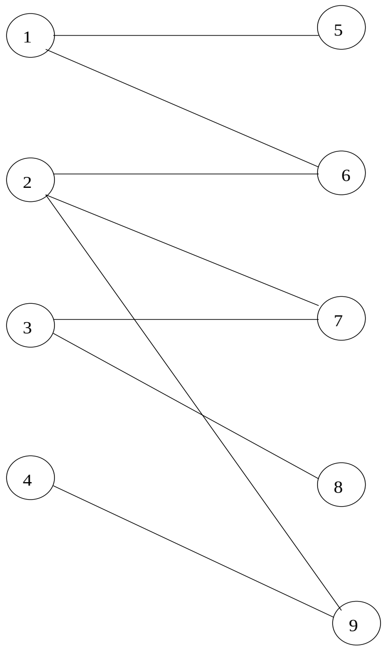

Abbildung 21

99. Einem Schilehrer stehen n Paar Schi mit Längen $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n$ zur Verfügung. Der Schilehrer möchte jedem seiner n Schüler ein Paar Schi zuteilen. O.B.d.A. seien $h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq h_n$ die Größen der n Schüler. Die Länge der einer Person zugeteilten Schi sollte in direkter Proportion zu deren Grösse stehen. Sei α die Proportionalitätskonstante. Der Schilehrer möchte jedem Schüler i ein Paar Schi $p(i)$ zuteilen, sodaß die Gesamtsumme $\sum_{i=1}^{n} |l_i - \alpha h_{p(i)}|$ der Differenzen zwischen der optimalen Schilänge und der Länge des zugeteilten Paars minimiert wird. Formulieren Sie dieses Problem als gewichtetes Matchingproblem in einem bipartiten Graphen. Zeigen Sie, daß das Matching, das dem i-ten Schüler den i-ten Schi zuteilt (d.h. $p(i) = i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), optimal ist.

100. (Das stabile Matchingproblem) Gegeben sei eine Gruppe bestehend aus n Männern und n Frauen, die heiraten möchten. Jede Person reiht die Gruppenmitglieder des anderen Geschlechts hinsichtlich ihrer Attraktivität. Sei M ein perfektes Matching, d.h. eine Mann-Frau Zuordnung bestehend aus n Paaren. Ein Paar $(i, j) \in M$, bestehend aus einem Mann i und einer Frau j, heißt instabil, wenn es eine Frau $j' \neq j$ und einen Mann $i' \neq i$ gibt, sodass $(i', j') \in M$ und Mann i Frau j' seiner Partnerin j vorzieht und Frau j Mann i' ihrem Partner i vorzieht. Ein perfektes Matching M^* heißt stabil, wenn es keine instabilen Paare $(i, j) \in M^*$ enthält.

    (a) Gibt es immer ein stabiles Matching?
    (b) Wenn es ein stabiles Matching gibt, ist dieses stets eindeutig?
    (c) Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines stabilen Matchings und beweisen Sie dessen Korrektheit.

101. Gegeben sei eine $n \times n$ Matrix C mit $0 - 1$ Einträgen. Bezeichne $I = \{1, \dots, n\}$ die Menge der Zeilen und $J = \{1', \dots, n'\}$ die Menge der Spalten der Matrix C. Unter einer *Überdeckung* von C verstehen wir eine Menge $K \subset I \cup J$ von Zeilen und Spalten ($I = \emptyset$ bzw. $J = \emptyset$ ist gestattet), sodaß aus $c_{ij} = 1$ folgt daß $i \in K$ oder $j' \in K$ gilt (beides ist natürlich auch erlaubt), d.h. die Zeilen und Spalten in K überdecken alle 1-Einträge von C.

     Gesucht ist eine Überdeckung K mit minimaler Kardinalität.

    (a) Formulieren Sie dieses Problem als ein Optimierungsproblemen auf Graphen, das in der Vorlesung behandelt wurde.
    (b) Welches andere Problem steht in engem Zusammenhang zum gegebenen Problem? (Hinweis: Lösen Sie zunächst Teil (a) der Aufgabe.)