74. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ sowie Knotengewichte $w_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in V$. Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt abgeschlossen, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist: Ist $i \in S$ und $(i, j) \in A$, so gilt auch $j \in S$. Gesucht ist eine abgeschlossenen Knotenmenge S mit maximalem Gewicht $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$. Zeigen Sie, daß dieses Problem auf ein Flußproblem (Schnittproblem) in einem geeignet definierten Graphen übergeführt werden kann.

75. Sparsame Berichterstattung von großen Sportereignissen.

    Bei den Olympischen Spielen möchte eine Gruppe von Journalisten keinen einzigen Wettkampf versäumen. Für jeden Wettkampf ist die Anfangszeit, die Dauer und der Austragungsort bekannt. Außerdem ist bekannt, wie lange man von jeder Wettkampfstätte zu jeder anderen braucht. Es sollen alle Wettkämpfe durch die kleinstmögliche Anzahl von Journalisten abgedeckt werden. Wie kann man dieses Problem als Flußproblem lösen?

76. Ein Unternehmer hat verschiedene Unternehmungen (Projekte, Investitionen,...) $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ zur Auswahl. Für jede Unternehmung kann er sich entscheiden, ob er sie durchführt oder nicht. Diese Entscheidungen sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern es ist eine Menge von Paaren $A \subseteq P \times P$ gegeben, wobei $(p, q) \in A$ bedeutet, dass p nur dann durchgeführt werden kann, wenn auch q durchgeführt wird ("'p impliziert q"'). Der Abhängigkeitsgraph (P, A) sei azyklisch.

    Au"serdem ist zu jeder Unternehmung p_i eine Zahl c_i gegeben, die für $c_i > 0$ die Kosten für die Durchführung des Projekts p_i angibt, bzw. für $c_i < 0$ den Gewinn.

    Der Unternehmer möchte eine zulässige Teilmenge von P auswählen, die seinen Nettogewinn maximiert.

    Modellieren Sie diese Aufgabe als Flußproblem in einem geeignet definierten Netzwerk.

77. Beweisen Sie das Flußzerlegungsresultat aus der Vorlesung.

78. Gegeben ist der gerichtete Graph $G = (N, A)$ aus Abbildung 13. Jeder Kante $(i, j) \in A$ ist eine obere Kapazität u_{ij} (die erste Zahl) und ein Kostenfaktor c_{ij} zugeordnet.

    (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der augmentierenden Wegemethode einen maximalen Fluß x von der Quelle s zur Senke t, der minimale Kosten $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$ aufweist, und geben Sie dessen Kosten an.

    (b) Geben Sie im obigen Beispiel einen Fluß x von s nach t vom Wert 4 mit minimalen Kosten an.

    (c) Lösen Sie Aufgabe (a) mit der negativen Kreisemethode.

    (d) Lösen Sie Aufgabe (a) mit der Methode von Goldberg und Tarjan.

79. Gegeben sei das Netzwerk aus Abbildung 14 mit Quelle 1 sowie Senke 5. Das Paar von Kantenbewertungen u_{ij}, c_{ij} gibt für jede Kante (i, j) deren obere Kapazität bzw. deren Kosten an. Bestimmen Sie ausgehend von den optimalen Knotenpotentialen π_i, $i \in N$, die in der Abbildung neben den Knoten angeschrieben sind, einen minimalen Kostenfluß vom Wert 5, ohne einen Algorithmus zur Bestimmung minimaler Kostenflüsse zu verwenden.

80. Beweisen oder widerlegen Sie: Falls das minimale Kostenflußproblem (MCF) eine zulässige Lösung besitzt und die Kostenfunktion $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$ über der Menge der zulässigen Flüsse nach unten beschränkt ist, dann gibt es stets eine Optimallösung x von (MCF), so daß es keinen Kreis Q im Ausgangsgraph $G = (N, A)$ gibt, für den alle Kanten $(i, j) \in Q$ die Bedingung $0 < x_{ij} < u_{ij}$ erfüllen. Welche Rolle spielen in dieser Aussage die Voraussetzungen?

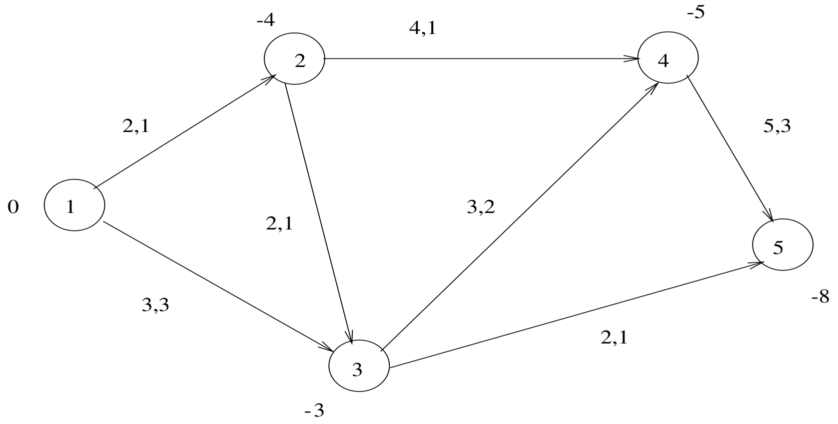

Abbildung 14

81. Gegeben sei das Netzwerk aus Abbildung 15 mit Quelle $s = 1$ und Senke $t = 8$. Das Paar von Kantenbewertungen u_{ij}, c_{ij} gibt für jede Kante (i, j) deren obere Kapazität bzw. deren Kosten an.

   (a) Bestimmen Sie mit einer Ihnen geeignet erscheinenden Methode einen kostenminimalen Fluß x von s nach t vom Wert 5 sowie dessen Kosten. Geben Sie eine optimale Lösung für das zu diesem Flußproblem gehörige duale Problem an.

   (b) Wie groß ist die maximale Flußmenge, die von der Quelle zur Senke gesandt werden kann? Geben Sie ferner einen minimalen Schnitt an.

   (c) Welche Kosten verursacht ein kostenminimaler Fluß von s nach t mit Flußwert 3?

   (d) Bestimmen Sie die Kostenkurve $F(v)$ eines kostenminimalen Flusses vom Wert v in Abhängigkeit von v für $0 \leq v \leq 9$.

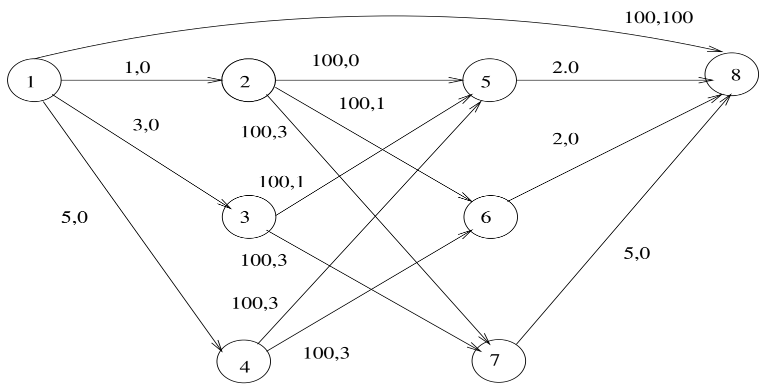

Abbildung 15

82. Gegeben sei das Netzwerk $\mathcal{N}$ aus Abbildung 16 mit Quelle $s = 1$ und Senke $t = 10$. Die Kantenbewertungen geben die Kapazitäten an.

   (a) Bestimmen Sie einen maximalen Fluß von s nach t, sowie einen minimalen Schnitt.

   (b) Wie verändert sich der maximale Fluß bzw. der minimale Schnitt, wenn die Kapazität der Kante $(1, 3)$ auf 16 erhöht wird?

   (c) Analog zu (b) für den Fall, daß die Kapazität der Kante $(4, 5)$ auf 10 erhöht wird?

   (d) Wie müßten in $\mathcal{N}$ aus (a) die Kapazitäten erweitert (d.h. vergrößert) werden, damit der maximale Flußwert um 2 steigt und zudem die Kosten der Kapazitätserweiterung möglichst gering sind? Hierbei wird angenommen, daß die Kosten der Erweiterung der Kapazität u_{ij} der Kante (i,j) umgekehrt proportional zu u_{ij} sind und daß die Gesamterweiterungskosten sich aus der Summe der Erweiterungskosten aller erweiterten Kanten ergeben. Wird z.B. die Kante (i,j) von $u_{ij} = 5$ auf $u_{ij} = 6$ erweitert, so betragen die Kosten $1/5$, erweitert man hingegen von $u_{ij} = 5$ auf $u_{ij} = 7$, so sind die Kosten $1/5 + 1/6 = 11/30$, da die Erweiterung Schritt für Schritt um eine Einheit stattfinden muß.

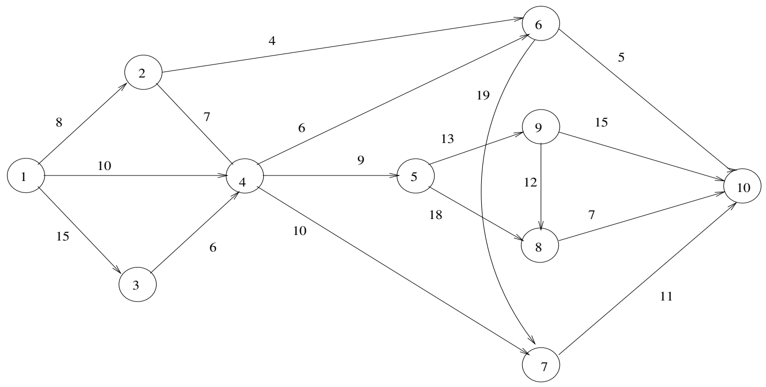

Abbildung 16

83. Bestimmen Sie, falls möglich, einen zulässigen Ausgangsfluß für das minimale Kostenflußproblem aus Abbildung 17. Das Paar von Kantenbewertungen ℓ_{ij}, u_{ij} gibt jeweils die untere und obere Kapazität der Kante $(i,j) \in A$ an (d.h. es soll $\ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ für alle $(i,j) \in A$ gelten). Die Knotenbewertungen b_i geben den Bedarf bzw. das Angebot des Knotens $i \in N$ an.

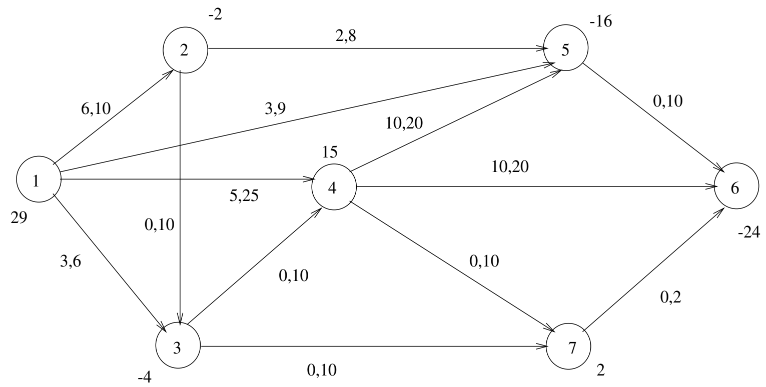

Abbildung 17

84. Überprüfen Sie, ob der in Abbildung 18 gegebene Fluß x von s nach t ein maximaler Fluß ist und gegebenenfalls ob es sich um einen maximalen Fluß mit minimalen Kosten handelt. (Die Flüße x_{ij}, die oberen Kapazitäten u_{ij} bzw. die Kosten c_{ij} sind der Abbildung zu entnehmen.)

85. Modellieren Sie das folgende Anwendungsproblem als Netzwerkflußproblem: Eine Fluggesellschaft benötigt am Tag j, $j = 1, \ldots, N$, genau r_j saubere Stoffservietten. Es gibt zwei Alternativen, um zu diesen zu gelangen, entweder neue Servietten zu kaufen oder gebrauchte in die Reinigung zu geben. Um es der Fluggesellschaft nicht allzu leicht zu machen, bietet die Wäscherei zwei Arten von Reinigung an, eine Schnellreinigung und eine Normalreinigung. Die Schnellreinigung dauert $m > 0$ Tage, die Normalreinigung n Tage mit $n > m$. Der Preis einer neuen Serviette beträgt $\bar{p}$ Schilling, während die Normalreinigung Kosten von $\bar{s}$ Schilling bzw. die Schnellreinigung Kosten

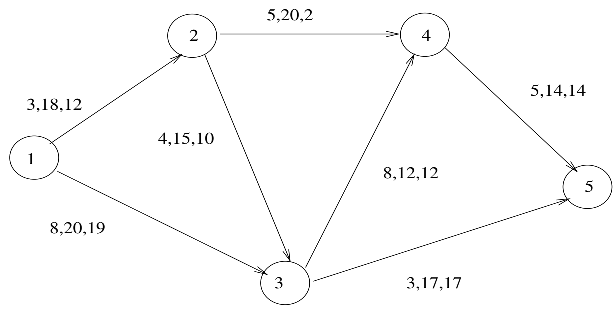

Abbildung 18

von $\bar{q}$ Schilling pro Serviette verursacht. Wie soll die Fluggesellschaft vorgehen, um ihren Bedarf an Servietten für alle N Tage möglichst kostengünstigst zu decken, wenn am Morgen von Tag 1 keine Servietten vorhanden sind? Illustrieren Sie Ihre Ideen an einem kleinen Beispiel.

86. Gegeben ein Netzwerk mit Quelle s, Senke t, unteren Kapazitäten ℓ_{ij}, oberen Kapazitäten u_{ij}, Kosten c_{ij}, $(i,j) \in A$ sowie Bedarfs/Angebotsmengen b_i, $i \in N$. Angenommen es liegt für diese Problemdaten ein kostenminimaler Fluß x vor.

    (a) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ausgehend von x einen neuen kostenminimalen Fluß bestimmt, wenn sich die Kosten einer Kante um eins erhöhen (erniedrigen).

    (b) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ausgehend von x einen neuen kostenminimalen Fluß bestimmt, wenn b_k für einen Knoten k um eins erhöht wird, dafür aber b_j für einen anderen Knoten j um eins erniedrigt wird.

    (c) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ausgehend von x einen neuen kostenminimalen Fluß bestimmt, wenn sich die Kapazität einer Kante um eins erhöht.

    (d) Behandeln Sie den Fall, wenn sich eine Kapazität (≥ 1) um eins erniedrigt.

87. Oft möchte man die Zahlen a_{ij} einer rechteckigen Tabelle runden. Dabei sollen sich jedoch die Zeilensummen r_i, $i = 1, \ldots, m$, und die Spaltensummen s_j, $j = 1, \ldots, n$, nicht zu stark ändern. Nehmen wir an, wir wollen eine Tabelle auf ganze Zahlen runden. Dann soll jedes Element a_{ij} entweder auf $\lfloor a_{ij} \rfloor$ oder auf $\lceil a_{ij} \rceil$ gesetzt werden, und dabei sollen sich die Zeilen- und Spaltensummen der gerundeten Zahlen um weniger als 1 von den tatsächlichen Werten unterscheiden.

    (a) Modellieren Sie obige Aufgabenstellung als Problem, in einem Graphen einen zulässigen Fluß mit den üblichen Flußerhaltungsgleichungen sowie verallgemeinerten Kapazitätsrestriktionen der Form $\ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ für alle Kanten $(i,j) \in A$ zu finden. Hierbei bezeichnet ℓ_{ij} die untere Kapazität der Kante (i,j), sowie u_{ij} die obere Kapazität. (Das Problem braucht nicht gelöst zu werden. Es reicht den Graphen und die unteren und oberen Kapazitäten anzugeben.)

    (b) Führen Sie Ihren Modellierungsansatz an Hand des folgenden Beispiels vor

3,7	6,8	7,3	17,8
9,6	2,4	0,7	12,7
3,6	1,2	6,5	11,3
16,9	10,4	14,5	

    (c) Angenommen, man möchte nicht eine beliebige zulässige Lösung für dieses Rundungsproblem finden, sondern die Summe der quadratischen Fehler (summiert über alle Einträge) minimieren. (Rundet man den Eintrag a_{ij} zu $\bar{a}_{ij} \in \{\lfloor a_{ij} \rfloor, \lceil a_{ij} \rceil\}$, dann beträgt der Fehler $(\bar{a}_{ij} - a_{ij})^2$). Wie läßt sich eine zulässige Rundung mit minimalen Kosten finden?