59. Gegeben sei das Netzwerk aus Abbildung 10. Alle Kanten $(i, j)$ mit Ausnahme der Kanten $(3, 6)$ mit Kapazität $u_{36} = 1$ und $(1, 2)$ sowie $(4, 6)$ mit $u_{12} = u_{46} = \sigma = (-1 + \sqrt{5})/2$ haben eine Kapazität $u_{ij} > 1$.

   (a) Zeigen Sie, daß eine ungeschickte Wahl der augmentierenden Wege im Verfahren von Ford und Fulkerson dazu führen kann, daß die Folge der Flußwerte, die im Rahmen des Verfahrens erzeugt wird, gegen einen Wert konvergiert, der beliebig viel kleiner als der tatsächliche maximale Flußwert $v_{max}$ ist.
   (Hinweis 1: Es gilt: $\sigma^{k+2} = \sigma^{k+1} - \sigma^k$, $k \geq 0$.
   Hinweis 2: Versende Fluß wiederholt entlang der folgenden 6 Wege:
   $P_1 = (s, 1, 2, 3, 6, t)$, $P_2 = (s, 2, 1, 3, 6, 5, t)$, $P_3 = (s, 1, 2, 4, 6, t)$, $P_4 = (s, 2, 1, 4, 6, 3, t)$, $P_5 = (s, 1, 2, 5, 6, t)$, $P_6 = (s, 2, 1, 5, 6, 4, t)$.

   (b) Lösen Sie das Beispiel aus (a) indem Sie jeweils einen kürzesten augmentierenden Weg wählen.

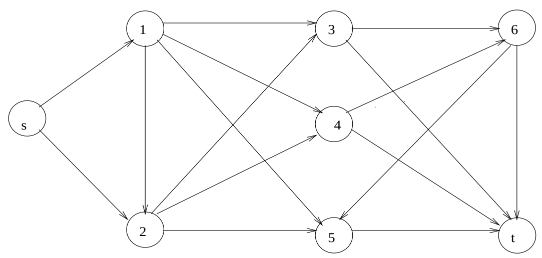


Abbildung 10

60. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Ford und Fulkerson (maximaler Fluß- minimaler Schnitt-Satz) den folgenden Satz von Menger:

   Die maximale Anzahl von kanten-disjunkten gerichteten Wegen zwischen zwei Knoten $s$ und $t$ in einem gerichteten, zusammenhängenden Graphen $G$ entspricht der minimalen Anzahl von Kanten, die aus $G$ entfernt werden müssen, um alle gerichteten Wege von der Quelle zur Senke zu zerstören.

61. Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (N, A)$ mit Quelle $s$ und Senke $t$. Gesucht ist ein Schnitt $(X, \overline{X})$ mit $s \in X$, $t \in \overline{X}$ und minimaler Kantenzahl $(=|\{(i, j) \in A : i \in X, j \in \overline{X}\}|)$. Zeigen Sie, daß sich dieses Problem sehr leicht durch die Definition eines geeigneten Netzwerks lösen läßt. Wie ist vorzugehen, wenn auch die Kanten von $\overline{X}$ nach $X$ zählen sollen?

62. Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung des maximalen Flußproblems: Jeder Kante $(i, j) \in A$ wird neben ihrer Kapazität $c_{ij}$ auch eine Durchflußzeit $\tau_{ij} \in \mathbb{N}_0$ zugeordnet. Ein Fluß, der zur Zeit $\tau \in \mathbb{N}_0$ im Knoten $i$ startet und entlang der Kante $(i, j)$ verschickt wird, trifft im Knoten $j$ zur Zeit $\tau + \tau_{ij}$ ein. Es ergibt sich die folgende Fragestellung: Gegeben ein Zeitlimit $T$, wieviele Flußeinheiten lassen sich in $T$ Zeiteinheiten von der Quelle $s$ zur Senke $t$ transportieren?

   (a) Zeigen Sie, daß sich dieses sogenannte *maximale dynamische Flußproblem* als klassisches maximales Flußproblem auf einem geeignet erweiterten Netzwerk formulieren läßt.

   (b) Wo liegen die Nachteile dieses Ansatzes?

63. Beweisen Sie die Version des maximalen Fluß minimalen Schnitt Satzes für untere und obere Kantenkapazitäten.

64. Bestimmen Sie einen maximalen Fluß von der Quelle $s$ zur Senke $t$ im Netzwerk aus Abbildung 11. Die Kantenbewertungen $\ell_{ij}, u_{ij}$ geben die unteren bzw. oberen Kapazitäten an.

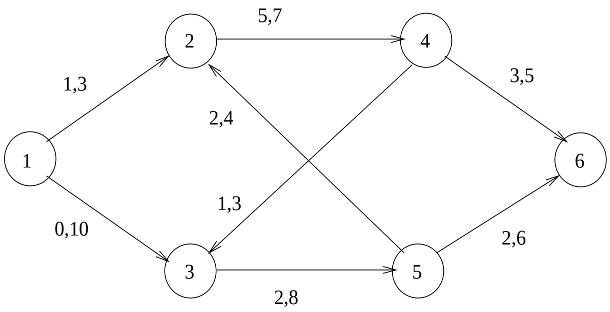


Abbildung 11

65. (a) In welchem der Netzwerke aus Abbildung 12 existiert ein zulässiger Fluß von der Quelle $s = 1$ zur Senke $t = 6$ bzgl. der dort angegebenen unteren und oberen Kapazitätschranken $\ell_{ij}, u_{ij}$?

(b) Im Fall der Existenz eines zulässigen Flusses geben Sie jeweils einen zulässigen Fluß von minimalem und von maximalem Wert an. Andernfalls bestimmen Sie einen Schnitt, der die Bedingung aus dem Satz von Hoffman verletzt.

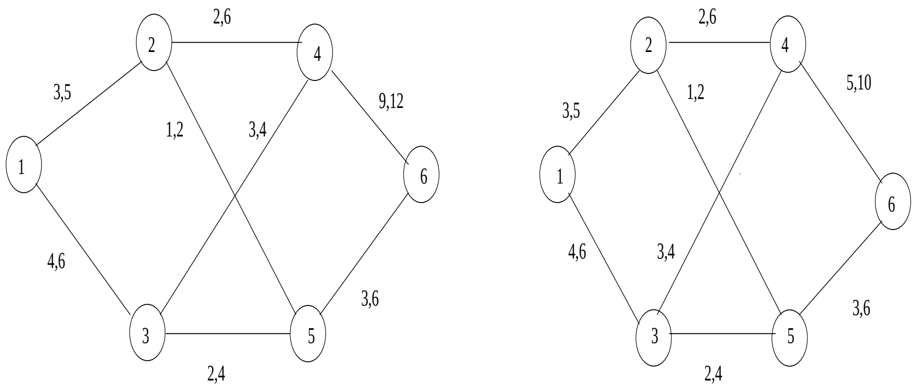


Abbildung 12

66. Angenommen, es wurde ein maximaler Fluß in einem maximalen Flußproblem bestimmt.

(a) Nun wird festgestellt, daß versehentlich die Kapazität einer Kante $(i, j)$ um $k$ Einheiten zu niedrig angesetzt wurde. Zeigen Sie, daß ein korrekter maximaler Fluß in $O(mk)$ Zeit bestimmt werden kann.

(b) Wie in (a) für den Fall, daß die Kapazität einer Kante $(i, j)$ um $k$ Einheiten zu hoch angesetzt wurde.

67. Gegeben sei ein minimales Schnittproblem. Seien $(X, \overline{X})$ und $(Y, \overline{Y})$ zwei Schnitte im Graph $G$. Zeigen Sie, daß die Kapazität eines Schnittes eine *submodulare* Funktion ist, d.h., daß folgende Ungleichung für je zwei Schnitte in $G$ gilt:

$$u(X, \overline{X}) + u(Y, \overline{Y}) \geq u(X \cup Y, \overline{X \cup Y}) + u(X \cap Y, \overline{X \cap Y})\,. \tag{1}$$

Verwenden Sie (1) um folgende Eigenschaft zu beweisen: Die Vereinigung und der Schnitt von zwei minimalen Schnitten in $G$ sind wiederum minimale Schnitte in $G$.

68. Gegeben sei ein maximales Flußproblem mit ganzzahligen Kapazitäten sowie ein maximaler Fluß $x^*$, der nicht ganzzahlig ist. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, um den Fluß

$x$ auf einen ganzzahligen maximalen Fluß zu transformieren. Analysieren Sie die Zeitkomplexität Ihres Algorithmus.

69. Gegeben sei ein Netzwerk mit Quelle $s$, Senke $t$ sowie unteren und oberen Kapazitäten $\ell_{ij}$ bzw. $u_{ij}$. Angenommen es gilt $\ell_{ij} \geq 0$ für alle Kanten $(i, j)$, aber $\ell_{ij} > 0$ für zumindest eine Kante $(i, j)$. In diesem Fall ist natürlich der Nullfluß mit $x_{ij} = 0$ für alle $(i, j)$ nicht zulässig. Es macht daher Sinn, nach einem zulässigen Fluß mit kleinstmöglichem Flußwert zu suchen (="minimales Flußwertproblem").

    (a) Finden Sie einen Begriff, der in diesem Problem dem Konzept eines augmentierenden Weges für das maximale Flußproblem entspricht und entwickeln Sie darauf aufbauend ein Optimalitätskriterium für dieses Problem.

    (b) Entwickeln Sie auf der Basis Ihrer Überlegungen aus (a) eine Methode zur Lösung des minimalen Flußwertproblems und wenden Sie diese auf ein selbst gewähltes Beispiel an.

    (c) Zeigen Sie: Existiert ein zulässiger Fluß bzgl. der Kapazitätsschranken $\ell_{ij}$ und $u_{ij}$, dann ist der minimale Flußwert gleich dem Maximum von $\ell(X, \overline{X}) - u(\overline{X}, X)$ über alle Schnitte $(X, \overline{X})$.

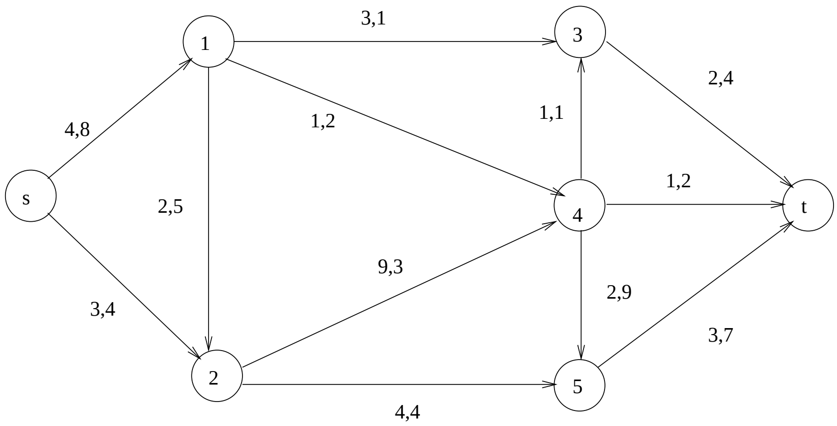


Abbildung 13

70. Das amerikanische Volkszählungsamt (U.S. Census Bureau) veröffentlicht Tabellen mit Daten aus Volkszählungen. Sei $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, eine $p \times q$ Tabelle. Bezeichne $r_i$ bzw. $c_j$ die Summe der Einträge in der $i$-ten Zeile bzw. in der $j$-ten Spalte. Es wird angenommen, daß $r_i > 0$ für alle $1 \leq i \leq p$ und $c_j > 0$ für alle $1 \leq j \leq q$ gilt. Das Census Bureau gibt die Summen $r_i$, $1 \leq i \leq p$, und $c_j$, $1 \leq j \leq q$, und auch einige Einträge der Matrix $D$ bekannt, möchte aber dennoch der Vertraulichkeit wegen einige Einträge für sich behalten. Sei $Y$ die Menge der bekanntgegebenen Einträge. Gegebenenfalls könnte der Wert eines nicht bekanntgegebenen Eintrages mit Hilfe der Summenwerte und der bekanntgegebenen Einträge ermittelt werden. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn nur ein einziger Wert des nicht bekanntgegebenen Eintrages mit den bekanntgegebenen Einträgen und Summenwerten konsistent ist. Ein solcher Eintrag, dessen Wert ermittelt werden kann, heißt *ungeschützt*.

    Entwicklen Sie einen polynomialen Algorithmus, um alle ungeschützten Einträge in $D$ zu identifizieren.

71. **Das Engpaß-Transportproblem (ETP).**
    Das Transportproblem ist ein Spezialfall des minimalen Kostenflußproblems. Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$, ein Bedarfsvektor $b$, wobei alle Knoten in $V_1$ Quellen (d.h. $b_i > 0$

für $i \in V_1$) und alle Knoten in $V_2$ Senken sind (d.h. $b_i < 0$ für $i \in V_2$ gilt) und Kantenkosten $c_{ij}$ für $(i, j) \in E$. Es liegen keine Kapazitätbeschränkungen vor, d.h. es gilt $u_{ij} = \infty$ für alle $(i, j) \in E$.

In der Engpaßvariante des Transportproblems (ETP) wird ein ganzzahliger zulässiger Fluß $x = (x_{ij})_{(i,j)\in E}$ gesucht, der die Zielfunktion $\max\{c_{ij}x_{ij} : (i, j) \in E\}$ minimiert.

(a) Betrachten Sie folgende Entscheidungsproblemvariante des ETP. Sei $\lambda > 0$ ein Parameter. Gibt es einen zulässigen Fluß $x$ in $G$ mit Zielfunktionswert $\max\{c_{ij}x_{ij} : (i, j) \in E\} \leq \lambda$? Entwerfen Sie eine Methode, um dieses Problem effizient zu lösen.

(b) Verwenden Sie das Problem aus (a), um einen polynomialen Algorithmus für das ETP zu entwicklen. Welche Laufzeit hat Ihr Algorithmus?

72. Eine Stadt habe $r$ Einwohner $E_1, E_2, \ldots, E_r$ sowie $q$ Vereine $V_1, V_2, \ldots, V_q$ und $p$ politische Parteien $P_1, P_2, \ldots, P_p$. Jeder Einwohner ist Mitglied in mindestens einem Verein und kann höchstens einer politischen Partei angehören. Jeder Verein hat nun die Aufgabe eines seiner Mitglieder für den Stadtsenat zu nominieren. Die Zusammenstellung des Senats soll so erfolgen, daß höchstens $u_k$ der Senatsmitglieder der Partei $P_k$ angehören, $k = 1, \ldots, p$. Ferner soll kein Mitglied des Senats mehr als einen Verein vertreten.

(a) Die Frage, die sich nun stellt, ist, unter welchen Voraussetzungen eine solche Zusammenstellung überhaupt existiert. Zeigen Sie, wie sich diese Frage durch die Lösung eines geeignet formulierten Netzwerkflußproblems beantworten läßt.

(b) Betrachten Sie die folgende konkrete Aufgabenstellung: Sei $r = 7$, $q = 4$ und $p = 3$. Der Verein $V_1$ hat die Mitglieder $R_1$ und $R_2$, $V_2$ hat die Mitglieder $R_2$, $R_3$ und $R_4$, $V_3$ die Mitglieder $R_4$ und $R_5$ und schließlich $V_4$ die Mitglieder $R_4$, $R_5$, $R_6$ und $R_7$. Die Einwohner $R_1$ und $R_2$ gehören der Partei $P_1$ an, $R_3$ und $R_4$ sind Mitglieder der Partei $P_2$ und $R_5$, $R_6$ und $R_7$ gehören der Partei $P_3$ an. Ferner sei $u_1 = 2$, $u_2 = 2$ und $u_3 = 1$.

Wie sieht das in (a) formulierte Netzwerkflußproblem in diesem Fall aus? Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Flußmodells entweder eine zulässige Lösung oder begründen Sie, warum es eine solche nicht geben kann.

(c) Wie verändert sich die Situation in (b), wenn $u_3$ auf 0 gesetzt wird?

73. In einer regionalen Fußball-Liga spielen 10 Fußballmannschaften um den Titel. Jede Mannschaft spielt viermal gegen jede andere Mannschaft. Die Reihenfolge und das Datum der Spiele wird am Anfang der Saison festgelegt. Nehmen wir an, daß, wie es früher auch in Österreich üblich war, ein Sieg 2 Punkt zählt, ein Unentschieden 1 Punkt, und eine Niederlage 0 Punkte. Wer am Ende am meisten Punkte hat, ist Fußballmeister. Nach einiger Zeit hat jede der Mannschaften schon eine Reihe von Spielen gespielt und entsprechende Punkte gesammelt. Ob eine Mannschaft am Ende noch Meister werden kann, hängt jedoch nicht nur von ihren eigenen Spielergebnissen ab, sondern auch von den Spielen der übrigen Mannschaften untereinander.

Es soll die Frage untersucht werden, ob eine gewisse Mannschaft, bei einem gegebenen Punktestand aller Mannschaften und bei einer gegebenen Menge von noch zu spielenden Spielen, *theoretisch* überhaupt noch die Möglichkeit hat, Meister zu werden. Das heißt: Gibt es eine Kombination von Spielergebnissen der zukünftigen Spiele, unter denen die betreffende Mannschaft im Endergebnis mindestens so viele Punkte erreicht wie jede andere Mannschaft?

(a) Wie kann man dieses Problem als Flußproblem formulieren?

(b) Funktioniert Ihr Ansatz für den Fall, daß jede Partie einen Sieger hat und dieser 1 Punkt erhält und der Verlierer 0 Punkte? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

(c) Funktioniert ihr Ansatz für die aktuell in Österreich verwendete Punkteverteilungsregel? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?