46. Bestimmen Sie für den Startknoten $s = 1$ mit Hilfe des Algorithmus von Bellman/Ford/Moore einen kürzesten Wegebaum für den Graphen aus Abbildung 5.

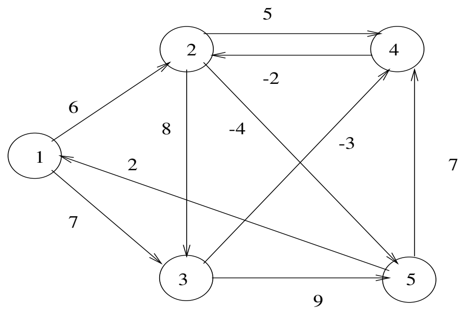

Abbildung 5

47. Bestimmen Sie die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren in den Graphen aus Abbildung 6.

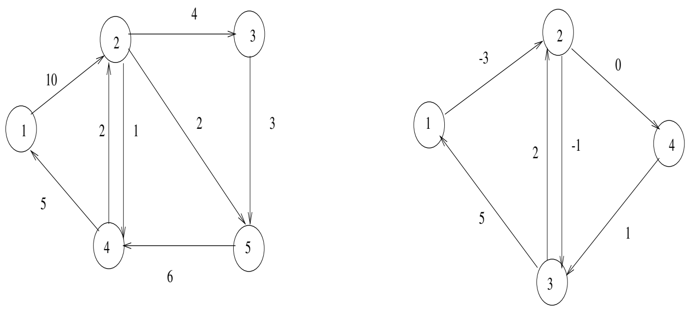

Abbildung 6

48. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Bestimmung eines kürzesten Wegebaumes in einem azyklischen Graphen (d.h. einem Graphen ohne gerichteten Kreis).

    Führen Sie Ihren Algorithmus an Hand des Beispiels aus Abbildung 7 mit Startknoten $s = 1$ vor.

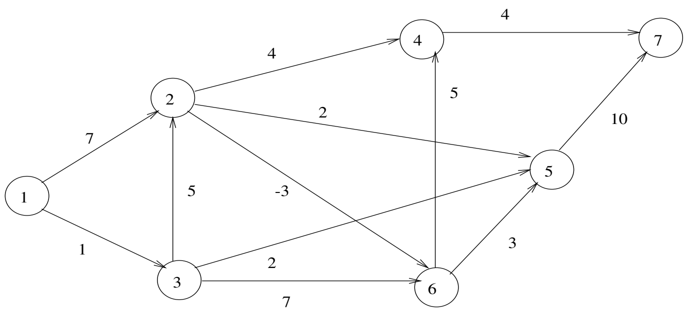

Abbildung 7

49. Herr Schlaukopf schlägt folgende Vorgangsweise zur Lösung eines kürzesten Wegeproblems mit beliebigen reellen Kantengewichten w_{ij} vor: Sei $w_{\min} = \min\{w_{ij} : (i,j) \in A\}$. Gilt $w_{\min} < 0$, so addiere man $|w_{\min}|$ zu jedem Kantengewicht w_{ij} und löse dann das resultierende kürzeste Wegeproblem mit nicht-negativen Kantengewichten $w'_{ij} = w_{ij} + |w_{\min}|$ unter Verwendung von Dijkstras Algorithmus.

Ist diese Vorgangsweise korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis der Korrektheit oder Gegenbeispiel).

50. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ und Kantengewichte w_{ij}, $(i, j) \in A$, sowie zwei ausgezeichnete Knoten s und t. Sei P^* ein kürzester Weg von s nach t und bezeichne $\mathcal{P}_{st}$ die Menge aller gerichteten Wege von s nach t. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Lösung des folgenden Problems (zweit-kürzestes Wegeproblem): Gesucht ist ein Weg P' von s nach t mit der Eigenschaft
$$w(P') \leq w(P) \qquad \text{für alle } P \in \mathcal{P}_{st} \setminus \{P^*\},$$
d.h. ein Weg von s nach t, der nach P^* der kürzeste Weg von s nach t ist (es kann $w(P^*) = w(P')$ gelten).

51. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ und Kantengewichte w_{ij}, $(i, j) \in A$ sowie ein Startknoten $s \in V$ und ein Zielknoten $t \in V$. Gesucht ist ein gerichteter Weg von s nach t mit maximaler Kapazität. Die Kapazität eines Weges ist definiert als Minimum der Kantengewichte der Kanten entlang des Weges. Angenommen, die Kanten liegen bereits in sortierter Form (nach aufsteigendem Gewicht) vor. Entwerfen Sie unter Ausnutzung dieser Annahme einen möglichst effizienten Algorithmus zur Bestimmung eines Weges mit maximaler Kapazität.

52. Betrachten Sie das folgende System von Differenzenungleichungen: Gesucht ist ein Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sodaß die folgenden Ungleichungen erfüllt sind
$$x_{j_k} - x_{i_k} \leq b_k \qquad \text{für } k = 1, \ldots, m$$
wobei $i_k, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ und $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ ein gegebener Vektor reeller Zahlen ist.

Zeigen Sie, daß man die Frage nach der Existenz einer Lösung dieses Systems mittels eines kürzesten Wegeproblems (negativen Kreiseproblems) in einem geeignet definierten Graphen beantworten kann. Zeigen Sie ferner, daß im Falle der Existenz einer Lösung mit diesem Ansatz auch eine solche bestimmt werden kann.

53. Finden Sie eine zulässige Lösung der folgenden Systeme von Differenzenungleichungen, oder beweisen Sie, daß eine solche nicht existiert:

$$(a) \quad \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ x_1 - x_5 & \leq & 2 \\ x_2 - x_4 & \leq & -6 \\ x_3 - x_2 & \leq & 1 \\ x_4 - x_1 & \leq & 3 \\ x_4 - x_3 & \leq & 5 \\ x_4 - x_5 & \leq & 10 \\ x_5 - x_3 & \leq & -4 \\ x_5 - x_4 & \leq & -8 \end{array} \qquad\qquad (b) \quad \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ x_1 - x_4 & \leq & -4 \\ x_2 - x_3 & \leq & 2 \\ x_2 - x_5 & \leq & 7 \\ x_2 - x_6 & \leq & 5 \\ x_3 - x_6 & \leq & 10 \\ x_4 - x_2 & \leq & 2 \\ x_5 - x_1 & \leq & -1 \\ x_5 - x_4 & \leq & 3 \\ x_6 - x_3 & \leq & -8 \end{array}$$

54. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$, sowie ein Startknoten $s \in V$ und ein Zielknoten $t \in V$. Jeder Kante (i, j) sei eine Länge $w_{ij} \in \mathbb{R}$ und jedem Knoten $i \in V$ eine reelle Zahl $\pi_i \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Die Differenz $\tau_{ij} = \pi_i - \pi_j$ wird oft auch als *Spannung* der Kante (i, j) bzgl. des Potentialvektors π bezeichnet. Bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge aller gerichteten Wege von s nach t.

Betrachten Sie nun das folgende sogenannte maximale Spannungsproblem:

$$
\begin{array}{llll}
(MT) & \max & \sum\limits_{(i,j)\in P} \tau_{ij} & \\
& & & \\
& s.t. & P \in \mathcal{P} & \\
& & \tau_{ij} = \pi_i - \pi_j & \text{für alle } (i,j) \in P \\
& & \tau_{ij} \leq w_{ij} & \text{für alle } (i,j) \in P \\
& & p_i \text{ beliebig} & \text{für alle } i \in N.
\end{array}
$$

Ist P^* ein Weg für den das Maximum in (MT) angenommen wird, so heißt der Wert $\sum_{(i,j)\in P^*} \tau_{ij}$ maximale Spannung zwischen s und t.

(a) Zeigen Sie, daß unter der Voraussetzung, daß ein kürzester Weg von s nach t bzgl. der Gewichte w_{ij} existiert, die Länge eines kürzesten Weges von s nach t gleich der maximalen Spannung zwischen s und t ist.

(b) (Für mit linearer Optimierung Vertraute): Interpretieren Sie die Aussage aus (a) als Dualitätsresultat.

(c) Geben Sie ein numerisches Beispiel an, daß die Richtigkeit der Aussage aus (a) demonstriert.

55. Bestimmen Sie im Netzwerk aus

(i) Abbildung 8

(ii) Abbildung 9

einen maximalen Fluß von der Quelle $s = 1$ zur Senke $t = 8$ sowie einen minimalen Schnitt. Verwenden Sie dazu ein Verfahren Ihrer Wahl.

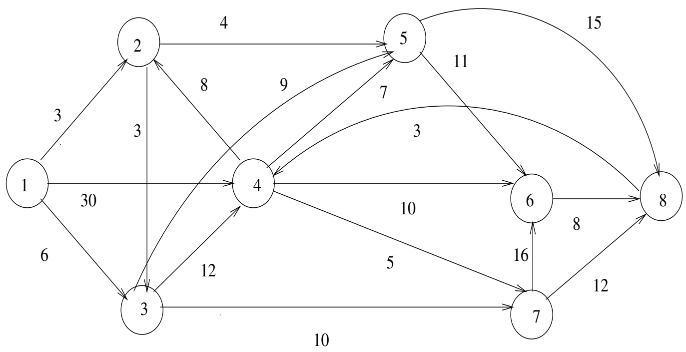

Abbildung 8

56. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? (Geben Sie einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.)

(a) Existiert ein eindeutiger minimaler Schnitt, so ist der maximale Fluß eindeutig.

(b) Existiert ein eindeutiger maximaler Fluß, so ist der minimale Schnitt eindeutig.

(c) Sind in einem maximalen Flußproblem alle Kapazitäten durch drei teilbar, so gibt es stets einen maximalen Fluß x derart, daß alle x_{ij} durch drei teilbar sind.

(d) Sind in einem maximalen Flußproblem alle Kapazitäten ungerade, so gibt es stets einen maximalen Fluß x derart, daß alle x_{ij} ungerade sind.

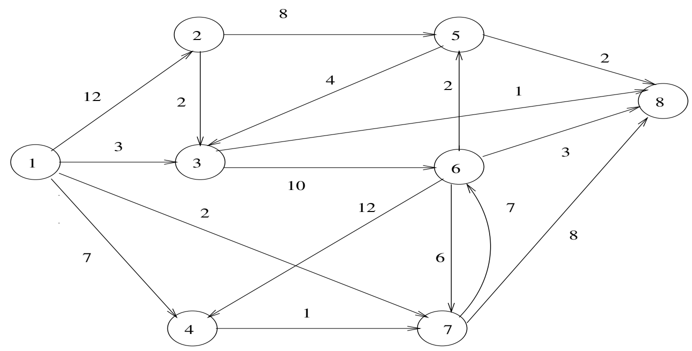

Abbildung 9

(e) Enthält der Graph $G = (N, A)$ eine Kante (i, j) deren Kapazität c_{ij} echt größer ist als die Kapazitäten aller übrigen Kanten (d.h. $c_{ij} > c_{k\ell}$ für alle Kanten $(k, \ell) \in A \setminus \{(i, j)\}$), dann gibt es keinen minimalen Schnitt $(X, \overline{X})$, der diese Kante enthält, d.h. für den $i \in X$ und $j \in \overline{X}$ gilt.

(f) Multipliziert man die Kapazitäten c_{ij} in einem minimalen Schnittproblem mit einer Konstanten $k > 0$, so ändert sich die Menge der minimalen Schnitte nicht.

(g) Addiert man eine Konstante $k > 0$ zu den Kapazitäten c_{ij} in einem maximalen Flußproblem, so wächst der maximale Flußwert um ein Vielfaches von k.

(h) Gegeben sei ein maximaler Fluß x. Es kann in $O(m)$ Zeit entschieden werden, ob x eindeutig ist.

57. Die Mitglieder des Sparvereins "Pfennigfuchser" veranstalten eine Weihnachtsfeier im Lokal "Zur Wildgans". Um das gegenseitige Kennenlernen zu fördern, wird beschlossen, daß keine zwei Personen aus derselben Familie an einem Tisch Platz nehmen sollen. Im Sparverein sind Personen aus p Familien vertreten, und zwar a_i Personen aus Familie i, $i = 1, \ldots p$. Gesucht ist nun eine Sitzordnung, die die Sparrunde unter Berücksichtigung der obigen Einschränkung auf die q Tische des Lokals aufteilt. (Auf Tisch j, $j = 1, \ldots, q$, finden b_j Personen Platz.)

(a) Formulieren Sie dieses Problem als Flußproblem auf einem geeignet definierten Netzwerk.

(b) Existiert immer eine zulässige Sitzordnung? (Begründung!)

58. (a) Modellieren Sie die folgende Problemstellung als minimales Schnittproblem auf einem geeignet definierten Netzwerk: Gegeben ist eine Menge $G = \{1, \ldots, n\}$ von Gegenständen, sowie Teilmengen $S_i \subseteq G$, $i = 1, \ldots, m$. Jedem Gegenstand j ist ein Preis $c_j > 0$ und jeder Menge S_i ein Profit $b_i > 0$ zugeordnet, der allerdings nur dann erlangt wird, wenn alle Gegenstände aus S_i verfügbar sind. Gesucht ist nun eine Teilmenge $G' \subseteq G$ von Gegenständen, sodaß der erzielte Gewinn (= Summe der erlangten Profite − Summe der Kosten) möglichst groß wird.

(b) Demonstrieren Sie Ihre Vorgangsweise an folgendem Beispiel: $n = 6$, $m = 7$ sowie

Gegenstand j	1	2	3	4	5	6
Preis c_j	4	5	12	6	10	5

Menge S_i	1	2	3	4	5	6	7
Elemente in S_i	1,2	1,5	2,3,4	3,4	3,4,5	4,6	5,6
Profit b_i	7	4	9	3	8	6	3