22. Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, reelle Kantengewichte $w_{ij}$ sowie eine Kante $(k, \ell) \in E$. Gesucht ist ein spannender Baum, der die Kante $(k, \ell)$ enthält und unter allen spannenden Bäumen mit dieser Eigenschaft minimales Gewicht (Summengewicht) hat.

    (a) Geben Sie einen effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems an und beweisen Sie dessen Korrektheit.

    (b) Verallgemeinern Sie Ihren Ansatz auf den Fall, daß zu Beginn eine kreisfreie Teilmenge $E' \subset E$ von Kanten gegeben ist, die alle im gesuchten spannenden Baum liegen sollen.

23. Gegeben ist ein minimales spannendes Baumproblem.

    (a) Angenommen, Sie stellen im Rahmen einer Prüfung nach der Bestimmung des minimalen spannenden Baumes fest, daß Sie versehentlich eine Kante aus der Menge $E$ vergessen haben zu berücksichtigen. Wie können Sie sich möglichst zeitsparend (d.h., ohne nochmals von ganz vorne zu beginnen) aus der Affäre ziehen und einen minimalen spannenden Baum für das gegebene Problem bestimmen?

    (b) Welche Vorgangsweise bietet sich an, wenn man versehentlich eine Kante in Betracht gezogen hat, die nicht in der gegebenen Kantenmenge liegt?

24. Sei $T^* = (V, E_{T^*})$ ein minimaler spannender Baum und $(i, j)$ eine Kante in $E$. Gesucht ist die Menge aller möglichen Werte für das Kantengewicht $w_{ij}$, sodaß der Baum $T^*$ minimal bleibt.

    (a) Zeigen Sie zunächst, daß diese Menge ein Intervall $I$ darstellt. (Dieses Intervall wird auch Toleranzintervall der Kante $(i, j)$ genannt.)

    (b) Überlegen Sie sich einen Algorithmus zur effizienten Bestimmung des Intervalls $I$.

    (c) Geben Sie einen Algorithmus an, der die Toleranzintervalle für alle Kanten in $E$ in einem Schritt bestimmt. (Dieser Algorithmus sollte eine bessere Laufzeit haben, als jener, die sich ergibt, wenn Sie den Algorithmus aus (b) getrennt für jede Kante in $E$ anwenden.)

25. Betrachten Sie folgenden Spezialfall des minimalen spannenden Baumproblems: Gegeben ist ein vollständiger ungerichteter Graph $G$ sowie $n$ positive reelle Zahlen $\alpha_i$. Gesucht ist ein minimaler spannender Baum für die Kantengewichte $w_{ij} = \alpha_i \alpha_j$. Geben Sie einen Algorithmus an, der dieses Problem möglichst effizient löst. (Ihr Algorithmus sollte schneller sein als ein allgemeiner Algorithmus zur Bestimmung minimaler spannender Bäume.)

26. Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, sowie je zwei reelle Gewichte $w_{ij}$ und $v_{ij}$ für alle $(i, j) \in E$. Gesucht ist ein spannender Baum $T^* = (V, E_{T^*})$, der die folgende gebrochene Zielfunktion minimiert:

    $$\frac{\sum_{(i,j) \in E_{T^*}} w_{ij}}{\sum_{(i,j) \in E_{T^*}} v_{ij}},$$

    wobei angenommen wird, daß $\sum_{(i,j) \in E_T} v_{ij} > 0$ für jeden spannenden Baum $T = (V, E_T)$ gilt.

    Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Lösung dieses Problems mit polynomialer Laufzeit. (Hinweis: binäre Suche stellt sich als hilfreiches Werkzeug heraus.)

27. Gegeben ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und reelle Kantengewichte $w_{ij}$. Gesucht ist ein *balancierter spannender Baum*, d.h. ein spannender Baum mit der Eigenschaft, daß die Differenz zwischen dem größten Kantengewicht einer Kante im Baum und dem kleinsten Kantengewicht im Baum minimal ist.

    Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems.

28. **Parametrische Analyse von minimalen spannenden Bäumen.** Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender gewichteter Graph dessen Kantengewichte als affin-lineare Funktionen eines Parameters $\lambda$ gegeben sind: $w_e(\lambda) = u_e + \lambda v_e$, für $e \in E$. Bezeichne $(G, w(\lambda))$ den gewichteten Graphen $G$ mit Kantengewichten $w_e(\lambda)$. Sei $T^\lambda$ ein minimaler spannender Baum in $(G, w(\lambda))$.

    (a) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Es gibt eine Konstante $k \in \mathbb{N}$, sodass $T^\lambda$ für alle $\lambda \geq k$ bzw. $\lambda \leq -k$ ein minimaler oder maximaler spannender Baum in $G$ bezüglich der Kantengewichte $v_e$ ist.

    (b) Betrachten wir ein beliebiges $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß es zwei Parametern $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ mit $\underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ gibt, sodaß $T^{\tilde{\lambda}}$ ein minimaler spannender Baum in $(G, w(\lambda))$ für alle $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ ist.

    (c) Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines minimalen spannenden Bäumen $T^\lambda$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ (also in parametrischer Abhängigkeit von $\lambda$).

29. Konstruieren Sie ein Unabhängigkeitssystem $(S, \mathcal{F})$, bei dem alle Basen (maximalen unabhängigen Mengen) gleich groß sind, das aber kein Matroid ist.

30. Gegeben sei eine endliche Menge $V$ von Punkten im $\mathbb{R}^2$. Das *Voronoi-Diagramm* von $V$ besteht aus den Regionen $p_v := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - v||_2 = \min_{w \in V} ||x - w||_2\}$ für $v \in V$ (die Region $P_v$ ist die Menge aller Punkte für die $v$ ein nächster Punkt aus der Menge $V$ ist.) Die *Delauney-Triangulierung* von $V$ ist der Graph mit Knotenmenge $V$, der eine Kante $\{v, w\}$ genau dann enthält, wenn $|P_v \cap P_w| > 1\}$.

    Ein minimaler spannender Baum für $V$ ist ein Baum mit Knotenmenge $V$ und Kantenmenge $E_T \subseteq E = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ sodaß $\sum_{\{u,v\} \in E_T} ||u - v||_2$ minimiert wird.

    Zeigen Sie, dass jeder minimale spannende Baum für $V$ ein Untergraph der Delauney-Triangulierung von $V$ ist.

    Anmerkung: Da die Delauney-Triangulierung in $O(n \log n)$ Zeit bestimmbar ist, ergibt sich ein $O(n \log n)$ Algorithmus für das Euklidische minimale Spannbaum Problem für Punkte in der Ebene. Analoge Resultate lassen sich für andere $L_p$-Normen zeigen.)

31. Zeigen Sie, dass das von einer Untermenge $U \subset S$ *erzeugte Untermatroid* $\mathcal{F}|_U$ eines Matroids $(S, \mathcal{F})$ ein Matroid ist:
$$\mathcal{F}|_U := \{\, A \subseteq S : A \in \mathcal{F} \text{ und } A \subseteq U \,\}$$

32. Zeigen Sie, dass für jede Zahl $k$ und jedes Matroid $(S, \mathcal{F})$ das *abgeschnittene Matroid*
$$\mathcal{F}_{\leq k} := \{\, A \subseteq S : A \in \mathcal{F} \text{ und } |A| \leq k \,\}$$
ein Matroid bildet.

33. Gegeben sei ein Matroid $(S, \mathcal{F})$ und eine Gewichtsfunktion $c : S \to \mathbb{R}$. Geben Sie einen Algorithmus an, der eine (nicht notwendigerweise maximale) unabhängige Menge $F^* \in \mathcal{F}$ bestimmt, deren Gesamtgewicht maximal ist.

34. Zeigen Sie: Sei $S$ eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^S$. $\mathcal{B}$ ist die Menge der Basen (maximal unabhängigen Mengen) eines Matroids genau dann wenn die folgenden 2 Eigenschaften erfüllt sind:

    (a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

    (b) Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \setminus B_2$, gibt es ein Element $y \in B_2 \setminus B_1$ sodaß $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

35. Gegeben sei ein Matroid $(S, \mathcal{F})$ und eine Gewichtsfunktion $c : S \to \mathbb{R}$. Geben Sie einen Algorithmus an, der eine (nicht notwendigerweise maximale) unabhängige Menge $F^* \in \mathcal{F}$ bestimmt, deren Gesamtgewicht maximal ist.

36. Zeigen Sie: Sei $S$ eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^S$. $\mathcal{B}$ ist die Menge der Basen (maximal unabhängigen Mengen) eines Matroids genau dann wenn die folgenden 2 Eigenschaften erfüllt sind:

    (a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

    (b) Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \setminus B_2$, gibt es ein Element $y \in B_2 \setminus B_1$ sodaß $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

37. Gegeben sei eine Grundmenge $S$ mit einer disjunkten Zerlegung $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ in $k$ Mengen und $k$ Zahlen $b_1, \ldots, b_k$. Betrachte nun das System $(S, \mathcal{F}$ mit

$$\mathcal{F} := \{\, A \subseteq E : |A \cap S_i| \leq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, k \,\}$$

    Zeigen Sie, dass $(S, \mathcal{F})$ ein Matroid ist (man nennt es auch Partitionsmatroid).

38. Zeigen Sie an Hand eines Beispiels, daß der Greedyalgorithmus für das Rucksackproblem beliebig schlechte Lösungen produzieren kann (in anderen Worten, es gibt keine konstante Gütegarantie).

39. Gegeben sei der gerichtete Graph $G$ aus Abbildung 2 sowie die zugehörigen Kantengewichten $w_{ij}$.

    (a) Bestimmen Sie eine Arboreszenz mit Wurzel 1 und minimalem Gewicht im Graphen aus Abbildung 2.

    (b) Wie verändert sich in (a) die Lösung, wenn keine Wurzel vorgegeben ist?

    (c) Bestimmen Sie eine Arboreszenz mit Wurzel 1 und maximalem Gewicht im Graphen aus Abbildung 2.

    (d) Wie verändert sich in (c) die Lösung, wenn keine Wurzel vorgegeben ist?

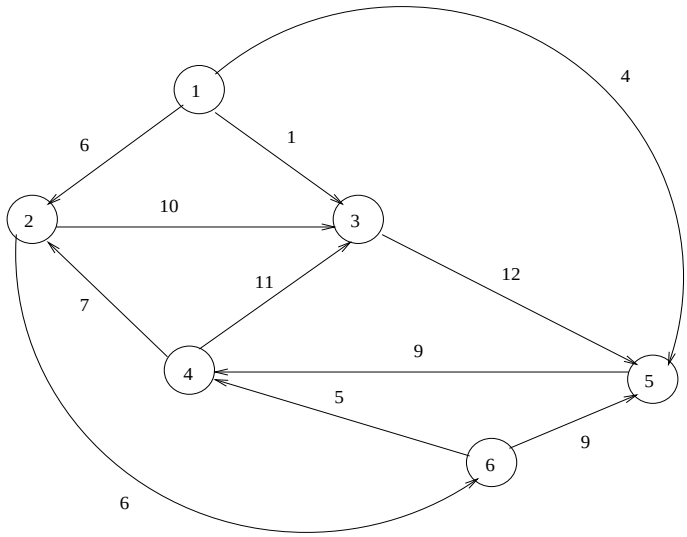


Abbildung 2

40. Bestimmen Sie ein Branching mit *maximalem* Gewicht im Graphen aus Abbildung 3.

41. Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus zur Lösung des folgenden Arboreszenzproblems mit Engpaßzielfunktion. Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (V, A)$, eine Wurzel $r \in V$ und reelle Kantengewichte $w_{ij}$ für $(i, j) \in A$. Gesucht ist eine Arboreszenz $\mathcal{T} = (V, A_{\mathcal{T}})$ mit Wurzel $r$ und minimalem Engpaßgewicht $w(\mathcal{T}) = \max_{a \in A_{\mathcal{T}}} w_a$.

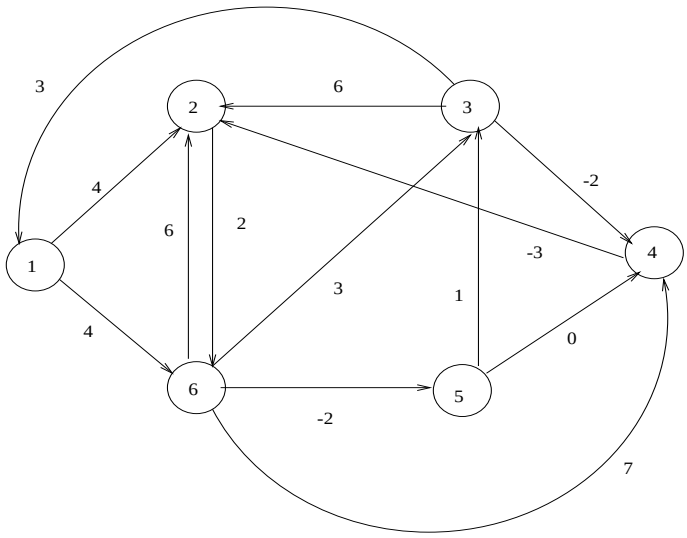


Abbildung 3

42. Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (V, A)$, eine Wurzel $r \in V$ und reelle Kantengewichte $w_{ij}$ für $(i, j) \in A$. Gesucht ist eine Arboreszenz mit minimalem Gewicht.

    Formulieren Sie dieses Problem als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem.

43. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra einen kürzesten Wegebaum für die Graphen in Abbildung 4.(Die Kante ohne angegebenes Gewicht in der Abbildung hat das Gewicht 1.)

44. Finden Sie einen gerichteten Graphen $G = (V, A)$ mit Kantengewichten $w_{ij} \in \mathbb{R}$ sodaß $G$ keinen negativen Kreis enthält und der Algorithmus von Dijkstra für zumindest einen Knoten $i \in V$ keinen kürzesten Weg vom Startknoten $s$ zum Knoten $i$ findet.

45. Finden Sie einen gerichteten Graphen $G = (V, A)$ mit Kantengewichten $w_{ij} \in \mathbb{R}$ (wobei nicht alle Kantengewichte nichtnegativ sein dürfen), sodaß $G$ keinen negativen Kreis enthält und der Algorithmus von Dijkstra korrekt arbeitet (d.h. einen kürzesten Wegebaum bestimmt).

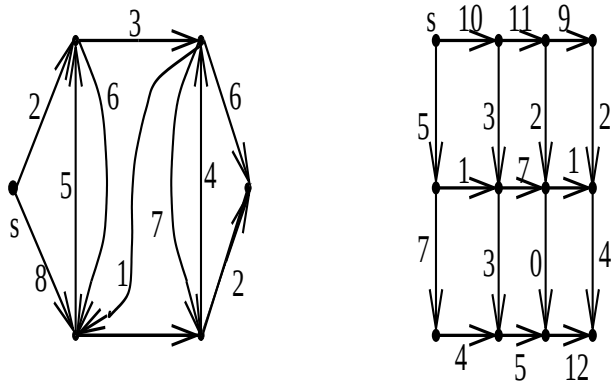


Abbildung 4