Kombinatorische Optimierung 1   WS 2013/14

1. Das SUBSET SUM Problem ist wie folgt gegeben:

   EINGABE: $n \in \mathbb{N}$, n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, Zahl $B \in \mathbb{N}$.
   FRAGE: Existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sodaß $\sum_{i \in I} a_i = B$ gilt?

   Das Partitionsproblem PARTITION ist wie folgt gegeben:

   EINGABE: $n \in \mathbb{N}$, n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$.
   FRAGE: Existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sodaß $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$ gilt?

   (a) Zeigen Sie, daß SUBSET SUM NP-vollständig ist. Sie dürfen hierbei die NP-Vollständigkeit von PARTITION voraussetzen.
   (b) Zeigen Sie, daß PARTITION NP-vollständig ist. Sie dürfen hierbei die NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM voraussetzen.

2. Zeigen Sie, daß das folgende Problem NP-schwer ist:

   EINGABE: $n \in \mathbb{N}$, $n \times n$ Matrix $D = (d_{ij})$.
   GESUCHT: Eine Rundreise, deren Länge maximal $(1 + \epsilon)$ der Länge der optimalen Rundreise beträgt. (ϵ ist hierbei eine feste Konstante > 0.)

   (Hier kann die NP-Vollständigkeit des Hamiltonschen Kreisproblems als bekannt vorausgesetzt werden.)

3. Zeigen Sie, daß das sogenannte maximale Cliquenproblem (CLIQUE) NP-vollständig ist.

   EINGABE: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
   FRAGE: Existiert eine Clique (vollständiger Untergraph von G) mit Kardinalität (Knotenzahl) $\geq k$?

   Sie können hierbei auf die NP-Vollständigkeit des Knotenüberdeckungsproblems (VERTEX COVER) zurückgreifen. Dieses ist wie folgt gegeben:

   EINGABE: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
   FRAGE: Besitzt G eine Knotenüberdeckung $C \subseteq V$ mit $\leq k$ Knoten? (Eine Teilmenge V' von V ist eine Knotenüberdeckung von G, wenn jede Kante in E mit mindestens einem Knoten in V' inzidiert.)

4. Zeigen Sie, daß das maximale Schnittproblem (MAXIMUM CUT PROBLEM) NP-schwer ist.

   EINGABE: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ sowie nichtnegative Kantengewichte w_{ij}.
   GESUCHT: Ein Schnitt $(X, \bar{X})$ in G ($X \cup \bar{X} = V$, $X \cap \bar{X} \neq \emptyset$) mit maximaler Kapazität $\sum\limits_{(i,j) \in E; i \in X, j \in \bar{X}} w_{ij}$.

   (Hinweis: Verwenden Sie das Partitionsproblem in Ihrer Reduktion.)

5. (a) Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Kruskal einen minimalen spannenden Baum für den Graphen aus Abbildung 1.

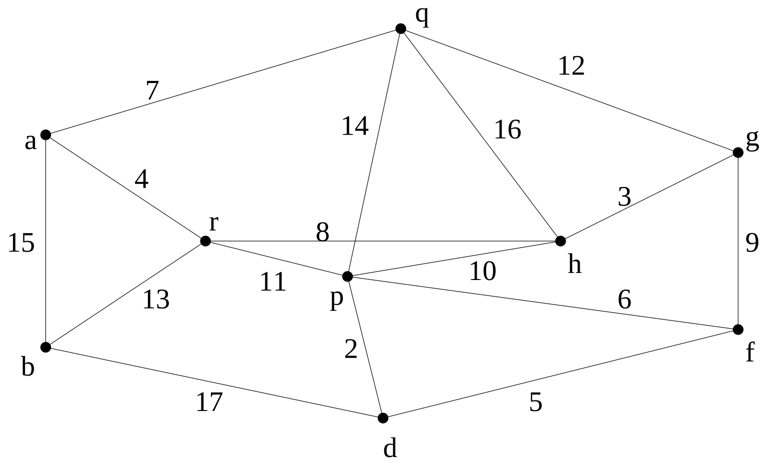

Abbildung 1

(b) Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Prim einen minimalen spannenden Baum für den Graphen aus Abbildung 1 (wählen Sie den Knoten r als Startknoten).

6. Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V, Kantenmenge E und Kantengewichten w_{ij}, $(i, j) \in E$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? (Geben Sie einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.)

   (a) Ist $T^* = (V, E_{T^*})$ ein spannender Baum mit $\sum_{(i,j)\in E_{T^*}} w_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in E_T} w_{ij}$ für alle spannenden Bäume $T = (V, E_T)$, so gilt auch $\max_{(i,j)\in E_{T^*}} w_{ij} \geq \max_{(i,j)\in E_T} w_{ij}$ für alle spannenden Bäume $T = (V, E_T)$.

   (b) Ist $T^* = (V, E_{T^*})$ ein spannender Baum mit $\min_{(i,j)\in E_{T^*}} w_{ij} \leq \min_{(i,j)\in E_T} w_{ij}$ für alle spannenden Bäume $T = (V, E_T)$, so gilt auch $\sum_{(i,j)\in E_{T^*}} w_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in E_T} w_{ij}$ für alle spannenden Bäume $T = (V, E_T)$.

   (c) Ist T ein minimaler spannender Baum bzgl. der Gewichte w_{ij}, so ist T auch minimaler spannender Baum bzgl. der Gewichte $w'_{ij} = w_{ij} + k$ mit $k \in \mathbb{R}$.

   (d) Ist T ein minimaler spannender Baum bzgl. der Gewichte w_{ij}, so ist T auch minimaler spannender Baum bzgl. der Gewichte $w'_{ij} = kw_{ij}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

   (e) Sei $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Numerierung der Kanten sodaß $w_{e_1} \leq w_{e_2} \leq \ldots \leq w_{e_m}$ gilt und sei $w'_{e_i} = i^2$, $i = 1, \ldots, m$. Ist $T^* = (V, E_{T^*})$ ein spannender Baum mit $\max_{(i,j)\in E_{T^*}} w_{ij} \leq \max_{(i,j)\in E_T} w_{ij}$ für alle spannenden Bäume $T = (V, E_T)$, so gilt auch $\max_{(i,j)\in E_{T^*}} w'_{ij} \leq \max_{(i,j)\in E_T} w'_{ij}$ für alle spannenden Bäume $T = (V, E_T)$.

   (f) Zu jedem minimalen spannenden Baumproblem P in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit beliebigen reellwertigen Kantengewichten w_e gibt es ein minimales spannendes Baumproblem $\widetilde{P}$ in einem zusammenhängenden Graphen mit nicht-negativen Kantengewichten $\widetilde{w}_e$, sodaß P und $\widetilde{P}$ äquivalent sind (d.h. dieselbe(n) Optimallösunge(n) besitzen).

7. Geben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines minimalen spannenden Waldes (ein spannender Wald spannt alle Knoten auf; jede Zusammenhangskomponente ist ein Baum) in einem gewichteten Graphen $G = (V, E)$ an (die Kantengewichte sind beliebige reelle Zahlen).

8. Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter Graph mit beliebigen reellwertigen Kantengewichten. Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines spannenden zusammenhängenden Untergraphen $H = (V, E_H)$ mit minimalem Gewicht in G.

9. Betrachten Sie das minimale spannende Baumproblem mit *lexikographischer Zielfunktion*, das wie folgt formuliert werden kann:

   Gegeben ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E sowie reelle Kantengewichte w_{ij} für $(i, j) \in E$. Sei $T = (V, E_T)$ ein spannender Baum. Als Gewicht $w(T)$ von T definieren wir den Vektor der aufsteigend geordneten Kantengewichte der Kanten $e \in E_T$.

   Gesucht ist ein spannender Baum T mit minimalem Gewicht $w(T)$.

   Entwickeln Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems und beweisen Sie dessen Korrektheit.

10. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten w_e, $e \in E$. Für jedes $e \in E$ definieren wir die Menge $M_e := \{f : f \in E, w_f \leq w_e\}$. Bezeichne $e_0 \in E$ eine Kante, die folgende Bedingung erfüllt:

    $$e_0 \in \operatorname{argmin}\{w_e : e \in E, M_e \text{ enthält die Kantenmenge eines spannenden Baumes in G}\}.$$

    Zeigen Sie, daß w_{e_0} der optimale Zielfunktionswert für das minimale spannende Baumproblem mit Engpaßzielfunktion in G ist.

11. **Die Schnitt-Optimalitätsbedingung.** Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit Kantengewichten w_e, $e \in E$, und sei $T = (V, E_T)$ ein spannender Baum in G. Sei $e \in E_T$ eine Kante des Baums T. Wenn eine Kante e in T gelöscht wird, dann zerfällt T in zwei Zusammenhangskomponenten deren Knotenmengen wir mit V_e und $V \setminus V_e$ bezeichnen. Bezeichne D_e den Schnitt $\delta(V_e) = \{e = (u, v) \in E : u \in V_e, v \in V \setminus V_e\}$.

    Beweisen Sie folgende Aussage: T ist ein minimaler spannender Baum in G dann und nur dann, wenn für jede Kante $e \in E_T$ die Bedingung $w_e \leq w_p$ für alle Kanten $p \in D_e$ erfüllt ist.

12. **Die Weg-Optimalitätsbedingung.** Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit Kantengewichten w_e und sei $T = (V, E_T)$ ein spannender Baum in G. Sei $e = (u, v) \in E \setminus E_T$. Wir bezeichnen mit P_e den eindeutigen Weg in T von u nach v. Beweisen Sie folgende Aussage: T ist ein minimaler spannender Baum in G dann und nur dann, wenn für jede Kante $e \in E \setminus E_T$ die Bedingung $w_e \geq w_p$ für alle Kanten $p \in P_e$ erfüllt ist.

13. Entwerfen Sie ein Kriterium, mit dessen Hilfe entschieden werden kann, ob es für eine gegebene Instanz des minimalen spannenden Baumproblems mehr als einen minimalen spannenden Baum gibt. (Dieses Kriterium muß auch für den Fall funktionieren, daß nicht alle Kantengewichte paarweise verschieden sind.)

14. Welche Zeitkomplexität ergibt sich für die Überprüfung der Minimalität eines gegebenen spannenden Baumes (a) mit Hilfe des Kriteriums aus Beispiel 12 bzw. (b) mit Hilfe des Kriteriums aus Beispiel 11? Ist eines der beiden Kriterien generell vorzuziehen? Wenn ja, warum? Wenn nein, wovon hängt der Ausgang des Vergleichs zwischen den beiden Kriterien ab?

15. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus zur Bestimmung eines spannenden Baumes in einem gegebenen zusammenhängenden, ungerichteten Graphen: Sortiere die Kanten nach absteigendem Gewicht und gehe die Kanten in dieser Reihenfolge durch. Wirf eine Kante aus dem Graph G raus, wenn Sie keine Brücke ist (eine Brücke ist eine Kante deren Entfernung 2 Zusammenhangskomponenten erzeugt). Andernfalls belasse die Kante in G. Setze diesen Vorgang fort, bis alle Kanten abgearbeitet sind.

    Liefert dieser Algorithmus als resultierenden Graphen einen minimalen spannenden Baum? Wenn ja, beweisen Sie dies. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

16. Beweisen Sie, daß jeder spannende Baum, der minimal bezüglich der Summenzielfunktion $\sum_{(i,j)\in E_T} w_{ij}$ ist, auch minimal bezüglich der Engpaßzielfunktion $\max_{(i,j)\in E_T} w_{ij}$ ist.

17. Behalten die Optimalitätskriterien aus den Aufgaben 11 und 12 Ihre Gültigkeit auch für das spannende Baumproblem mit Engpaßzielfunktion (die Minimierungsvariante, d.h. es gilt das größte Kantengewicht im Baum zu minieren)?

    Geben Sie Gegenbeispiele für nicht geltende Aussagen an bzw. einen Beweis für gültige Aussagen.

18. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph dessen Kanten blau oder rot gefärbt sind.

    (a) Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines spannenden Baumes mit maximaler Anzahl von roten Kanten.

    (b) Sei T ein spannender Baum mit k roten Kanten und T' ein spannender Baum mit k' $(k' > k)$ roten Kanten in G. Zeigen Sie, daß es für jedes k'', $k < k'' < k'$, einen spannenden Baum mit k'' roten Kanten in G gibt.

19. Sei $T = (V, E_T)$ ein ungerichteter Graph und $1 \in V$ ein ausgezeichneter Knoten. Wenn die Kantenmenge E_T genau einen Kreis C enthält und wenn ferner der Knoten 1 in C enthalten ist und Grad $d(1) = 2$ hat, dann heißt T *1-Baum*. Geben Sie einen Greedyalgorithmus zur Lösung des folgenden Problems an:

    Gegeben ist ein gewichteter Graph $G = (V, E, w)$. Gesucht ist ein spannender 1-Baum $T = (V, E_T)$, $E_T \subseteq E$, mit minimalem Gesamtgewicht $w(T) = \sum_{e\in E_T} w(e)$.

20. Sei $T^* = (V, E_{T^*})$ ein minimaler spannender Baum. Ein spannender Baum $\widetilde{T} = (V, E_{\widetilde{T}})$ heißt *zweitbester* spannender Baum, wenn kein anderer Baum mit Ausnahme von T^* kleineres Gesamtgewicht hat. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Bestimmung eines zweitbesten spannenden Baumes an.

    (Zusatzaufgabe: Verallgemeinern Sie Ihre Vorgangsweise auf die Bestimmung eines k-besten spannenden Baumes für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.)

21. Der Verein Geheimniskrämerei hat n Mitglieder, die in verschiedenen Städten leben. Eine vertrauliche Botschaft soll an alle Vereinsmitglieder verteilt werden. Die Verbreitung der Botschaft soll per e-mail erfolgen, wobei das verwendete e-mail Programm pro Aufruf des Programms nur die Weiterleitung der Botschaft von einem Mitglied i an genau ein anderes Mitglied j erlaubt. (Das Programm kann natürlich mehrmals aufgerufen werden.) Aus vereinsinternen (vor uns Normalsterblichen geheimgehaltenen) Gründen ist die direkte Kommunikation nicht unter allen Paaren von Mitgliedern möglich. Angenommen, es ist eine Liste L aller (ungeordneten) Paare $\{i, j\}$ von Mitgliedern gegeben, die untereinander kommunizieren können (wenn i die Botschaft an j weiterreichen kann, dann kann auch j die Botschaft an i weiterreichen). Für jedes solche Paar $\{i, j\}$ in L sei die Wahrscheinlichkeit p_{ij} gegeben, daß die per e-mail verschickte Nachricht auf dem Weg von i nach j in falsche Hände gerät.

    Ziel ist es, einen Verschickungsplan für die Botschaft zu entwerfen, sodaß die Gesamtwahrscheinlichkeit, daß die Botschaft irgendwann in falsche Hände gerät, minimiert wird. (Hierbei wird angenommen, daß die "Abfang-Ereignisse" für alle Paare $\{i, j\}$ voneinander unabhängig sind).

    (a) Modellieren Sie dieses Problem als kombinatorisches Optimierungsproblem (Grundmenge, Zielfunktion) und beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus zu dessen Lösung.

    (b) In welchem Zusammenhang steht das hier auftretende Optimierungsproblem zu in der Vorlesung behandelten Optimierungsaufgaben?