Hausübung Kombinatorische Optimierung 1 WS 2013/14

Abzugeben bei der mündlichen Prüfung oder davor. Die Beispiele sind selbständig zu bearbeiten. Wichtiger als eine 100%-ig korrekte Lösung ist der selbständige Lösungsversuch; auch unvollständige Ansätze oder Ideen, von deren Richtigkeit Sie nicht überzeugt sind, sollen niedergeschrieben werden (mit entsprechendem Kommentar).
Zwei der Beispiele dürfen gestrichen werden. Wer mindestens dreimal vorgerechnet hat, darf drei Beispiele streichen. Wer möchte, kann natürlich alle Aufgaben bearbeiten.

1. Gegeben sei das Netzwerk aus Abbildung 1a mit den dort angegebenen Kantenkosten c_{ij} und den Angebot/Bedarfswerten b_i. Angenommen, der durch die rechten der beiden jeder Kante zugeordneten Zahlen beschriebene Fluß $x^* = (x^*_{ij})$ ist ein minimaler Kostenfluß.

   (a) Bestimmen Sie eine Optimallösung des Dualproblems zum minimalen Kostenflußproblem.

   (b) Ist diese duale Optimallösung in diesem Beispiel eindeutig?

2. Gegeben sei das Netzwerk aus Abbildung 1b mit den dort angegebenen Kantenkosten c_{ij} und den Angebot/Bedarfswerten b_i. Betrachten Sie auf diesem Netzwerk das sogenannte unbeschränkte minimale Kostenflußproblem, d.h. für die unteren bzw. oberen Kapazitäten gilt $\ell_{ij} = 0$ sowie $u_{ij} = \infty$ für alle $(i, j) \in A$ (d.h. es wird nur $x_{ij} \geq 0$ gefordert).

   Gesucht ist ein minimaler Kostenfluß für das obige Netzwerk, wobei als bekannt vorausgesetzt werden darf, daß der Vektor $\pi = (-6, -9, -12, -7, -12, -8, -15)$ ein optimaler Knotenpotentialvektor ist. (Die Reihenfolge der Knoten entspricht ihrer Numerierung in aufsteigender Anordnung.)

   (a) Bestimmen Sie einen minimalen Kostenfluß unter Ausnutzung der Kenntnis von π.

   (b) Kontrollieren Sie anschließend durch Anwendung eines Optimalitätskriteriums Ihrer Wahl, daß der von Ihnen bestimmte Fluß tatsächlich minimale Kosten aufweist.

   (c) Bestimmen Sie mit einem Verfahren Ihrer Wahl einen minimalen Kostenfluß. (Hier ist anzunehmen, daß π nicht bekannt ist und die Berechnungen von vorne beginnen müssen.)

   (d) Gibt es in diesem Beispiel einen eindeutigen minimalen Kostenfluß?

   (e) Wie kann man allgemein entscheiden, ob ein vorliegender minimaler Kostenfluß eindeutig ist?

3. Wir betrachten das minimale spannende Baumproblem (mit Summenzielfunktion). Eine Kante $e \in E$ wird als *bedeutsam* bezeichnet, wenn ihre Entfernung aus E das Gewicht des minimalen spannenden Baumes ansteigen läßt. Eine Kante $e \in E$ wird als *bedeutsamste Kante* bezeichnet, wenn e bedeutsam ist und unter allen bedeutsamen Kanten einen maximalen Anstieg des Gewichts des minimalen spannenden Baumes mit sich bringt.

   (a) Gibt es stets eine bedeutsame Kante? (Beweis oder Gegenbeispiel)

   (b) Angenommen eine bedeutsame Kante existiert. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Bestimmung einer bedeutsamsten Kante und geben Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus an. (Nachdem Sie einen Algorithmus gefunden haben, denken Sie nochmals darüber nach, ob es einen schnelleren Algorithmus gibt.)

4. Gegeben sei der Graph G aus Abbildung 2.

   (a) Welche Knoten kommen als Wurzeln einer Arboreszenz in Frage? (Begründung!)

   (b) Bestimmen Sie eine Aboreszenz mit minimalem Gewicht und Wurzel $r = 7$.

   (c) Bestimmen Sie eine Aboreszenz mit maximalem Gewicht und Wurzel $r = 7$.

   (d) Bestimmen Sie eine Aboreszenz mit minimalem Gewicht (Wurzel beliebig).

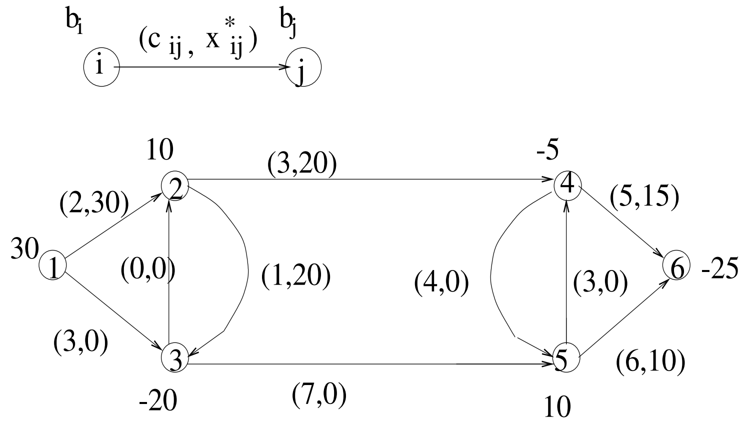

Abbildung 1a

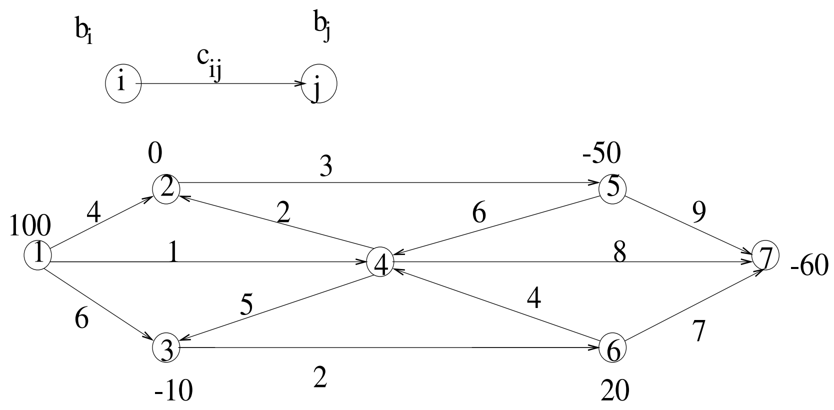

Abbildung 1b

(e) Bestimmen Sie ein Branching mit minimalem Gewicht.

(f) Bestimmen Sie ein Branching mit maximalem Gewicht.

(g) Angenommen, es stellt sich heraus, daß alle Kantengewichte um 13 Einheiten zu groß angesetzt wurden. Wie verändern sich die Antworten zu den obigen Fragen in dieser Situation?

5. Modellieren Sie die folgende Aufgabenstellung als kürzestes Wegeproblem in einem geeignet gewählten Graphen:

   Am Institut für organisierte und systematische Studierendenquälerei finden nächsten Sonntag durchgehend von 5:00 morgens bis 24:00 abends schriftliche Prüfungen im Hörsaal Q statt. Es stehen q Kandidaten $K_1, \ldots, K_q$ für die Aufsicht im Hörsaal zur Verfügung. Kandidat K_j, $j = 1, \ldots, q$, steht im Zeitintervall $[s_j, e_j]$ mit $s_j < e_j$ und $s_j, e_j \in \{5, \ldots, 24\}$ zur Verfügung und verlangt v_j Schilling als Vergütung, wenn er in diesem Zeitintervall tatsächlich zur Aufsichthaltung herangezogen wird.

   Der Chefplaner des Instituts hat nun die Aufgabe, einen Aufsichtsplan zu erstellen, sodaß zu jedem Zeitpunkt zumindest eine Aufsichtsperson im Hörsaal anwesend ist, und die Gesamtvergütungskosten minimiert werden.

6. Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? (Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis und für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an.)

   (a) Gilt $x_{ij} = u_{ij}$ für jeden maximalen Fluß x, dann gibt es einen minimalen Schnitt $(X, \overline{X})$, der die Kante (i, j) als Vorwärtskante enthält (d.h. $(i, j) \in (X, \overline{X})$).

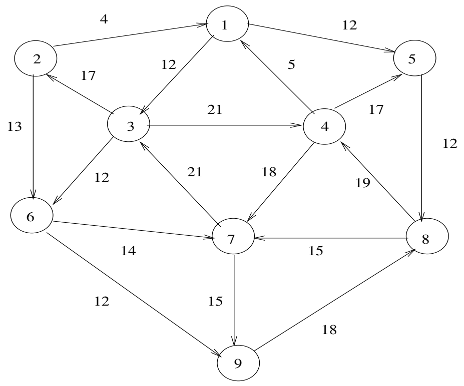

Abbildung 2

(b) Haben alle Kanten in einem Netzwerk verschiedene Kapazitäten, so ist der minimale Schnitt stets eindeutig.

(c) Gegeben sei ein Netzwerk mit n Knoten, m Kanten und ganzzahligen oberen Kapazitäten u_{ij}. Sei $(X, \overline{X})$ ein Schnitt, der bezüglich der neuen oberen Kapazitäten u'_{ij} mit $u'_{ij} := mu_{ij} + 1$ minimal ist. Dann ist $(X, \overline{X})$ auch minimal bezüglich der Ausgangskapazitäten u_{ij} und hat ferner unter allen Schnitten, die bzgl. der Kapaziäten u_{ij} minimal sind, die kleinstmögliche Anzahl an Schnittkanten (d.h. Kanten von X nach $\overline{X}$).

(d) Gegeben sei ein maximales Flußproblem in der in der Vorlesung eingeführten Form sowie zwei verschiedene maximale Flüsse $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$. Sei (i, j) eine beliebige Kante und sei $x_{ij}^{(1)} = p$ und $x_{ij}^{(2)} = q$. Dann gibt es stets einen maximalen Fluß $x^{(3)}$ sodaß $x_{ij}^{(3)} = (1-\lambda)p + \lambda q$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt.

(e) Es sei x^* ein maximaler Fluß in einem Netzwerk mit Kapazitäten u_{ij}. Dann ist x^* auch ein maximaler Fluß bzgl. der neuen Kapazitäten u' mit

$$u'_{ij} := \begin{cases} u_{ij} & \text{für } x^*_{ij} = u_{ij}, \\ \infty & \text{für } x^*_{ij} < u_{ij}. \end{cases}$$

(f) Der Algorithmus von Bellman-Ford-Moore findet unter allen kürzesten Wegen von einem Startknoten s zu einem Endknoten t stets einen kürzesten Weg mit minimaler Kantenanzahl.

(g) Analog zum Vorgängerbeispiel für den Algorithmus von Dijkstra (die Kantengewichte werden hier als nichtnegativ vorausgesetzt).

(h) Gegeben sei ein (klassisches) kürzestes Wegeproblem mit Graph $G = (V, A)$, Kantengewichten $w_{ij} \in \mathbb{N}$ und Start- bzw. Endknoten s und t. Sei P_1 ein kürzester Weg von s und t und (i, j) eine Kante auf P_1. Reduziert man das Gewicht von (i, j) um 1, so nimmt die Länge des kürzesten Weges von s nach t um 1 ab.

(i) Gegeben sei ein stark zusammenhängender gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit Kantengewichten $w_{ij} \in \mathbb{N}$ für $(i, j) \in A$. Ferner sei ein Startknoten $s \in V$ und ein Endknoten $t \in V$ gegeben. Dann gibt es stets einen längsten Weg (Weglänge=Summe der Kantengewichte entlang des Weges) von s nach t.

(j) In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit paarweise verschiedenen Kantengewichten w_{ij}, $(i, j) \in E$, existiert stets ein eindeutiger spannender Baum $T^* = (V, E_{T^*})$, der die balancierte Gewichtsfunktion $w(T) = \max_{(i,j)\in E_{T^*}} w_{ij} - \min_{(i,j)\in E_{T^*}} w_{ij}$ minimiert.

7. Betrachten Sie das Netzwerk aus Abbildung 3. Die Kantenbewertungen geben die oberen Kapazitäten u_{ij} an. Im Unterschied zum klassischen Problem sind hier nicht alle Kapazitäten reelle Zahlen, für die Kante $(2, 4)$ gilt nämlich $u_{24} = 2 + \lambda$, wobei λ ein positiver reeller Parameter ist.

(a) Bestimmen Sie einen maximalen Fluß von der Quelle 1 zur Senke 6 in Abhängigkeit von λ.

(b) Angenommen für jede Kante $(i,j) \in A$ ist die obere Kapazität in der Form $u_{ij} + v_{ij}\lambda$, $u_{ij}, v_{ij}, \lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. Bezeichne $v_{max}(\lambda)$ den Wert eines maximalen Flußes in Abhängigkeit von λ. Welche Eigenschaft besitzt $v_{max}(\lambda)$ im allgemeinen?

(c) Geben Sie die Funktion $v_{max}(\lambda)$ für das Beispiel aus (a) an.

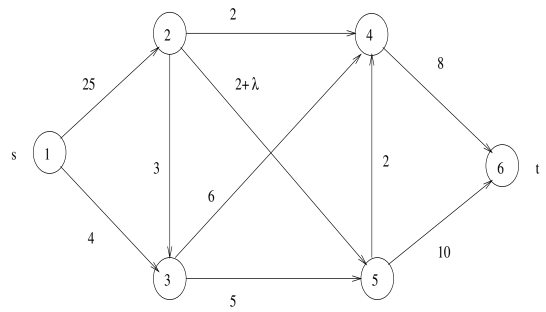

Abbildung 3

8. Die Firma TV-Super produziert Fernsehgeräte und verkauft diese direkt an Großkaufhäuser weiter. Für die Planung der Produktion stehen die folgenden Quartalsdaten zur Verfügung:

Quartal	1	2	3	4
Produktionskapazität (in Stück)	1700	3500	800	3200
Bedarf (in Stück)	500	2000	1800	4000
Produktionskosten (in Tausend Schilling)	15	12	18	21

Die Firma verfügt über ein Lager, in dem bis zu 1500 Fernsehgeräte gelagert werden können. Die Lagerkosten für Quartal j sind proportional zum Lagerbestand am Quartalsende. In den beiden ersten Quartalen Kosten von 100 Schilling pro Fernsehgerät, das sich am Ende des Quartals noch im Lager befindet, anfallen, danach steigen diese Kosten auf 150 Schilling pro Gerät und Quartal. Zu Jahresbeginn ist das Lager leer und dieser Ausgangzustand soll auch am Jahresende erneut vorliegen.

Da die Fernseher der Firma TV-Super sehr hohe Qualität haben, sind die Kunden auch bereit, auf die Deckung ihres Bedarfs zu warten. Wird ein Fernsehgerät, das in Quartal j auszuliefern wäre, erst in einem späteren Quartal geliefert, so fallen für die Firma TV-Super allerdings Mehrkosten an, die proportional zur Verspätung der Lieferung sind, wobei die Verzögerung um ein Quartal Kosten von 1000 Schilling pro verspätet geliefertem Gerät verursacht.

Das Ziel der Firma ist es, einen optimalen Produktions- und Lagerplan zu ermitteln, der die anfallenden Kosten minimiert. Modellieren Sie diese Aufgabenstellung als Netzwerkflußproblem. (Eine Lösung des Modells ist nicht erforderlich!)

9. Im Binpacking Problem sind n Gegenstände mit Größen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben, mit $0 \leq a_i \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Ziel ist es, die Gegenstände in die minimale Anzahl von Bins zu packen, wobei jeder Bin eine Kapazität von 1 hat (sprich die Summe der Größe der Gegenstände in einem Bin muß ≤ 1 sein).

Das Binpacking Problem ist NP-schwer. Zeigen Sie, daß das Problem im Fall $a_j > 1/3$ für alle $j = 1, \ldots, n$ einfach lösbar wird. (Hinweis: Reduktion auf ein in der Vorlesung behandeltes Optimierungsproblem.)