Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
3.12.2010

1. Durch mehrmaliges Anwenden der Regel von de l'Hospital ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x-\sin(x)} &\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)e^{\sin(x)}}{1-\cos(x)}\\
&\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin(x)e^{\sin(x)}-\cos^2(x)e^{\sin(x)}}{\sin(x)}\\
&\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos(x)e^{\sin(x)}+3\sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}-\cos^3(x)e^{\sin(x)}}{\cos(x)} = 1
\end{aligned}$$

2. Zu diesem Beispiel gibt es zwei Lösungswege. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\arctan(x)}\\
=&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\arctan(x)}{\ln(1+x)\arctan(x)}-\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x)\arctan(x)}\right)\\
=&\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln(1+x)}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\arctan(x)}\\
=&0-\frac{2}{\pi}=-\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Man kann zur Bestimmung des Grenzwertes auch de l'Hospital verwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{(\arctan(x)-\ln(1+x))'}{(\ln(1+x)\arctan(x))'} &= \frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}\arctan(x)+\ln(1+x)\frac{1}{1+x^2}}\\
&= \frac{\frac{1+x-1-x^2}{(1+x^2)(1+x)}}{\frac{1}{(1+x^2)(1+x)}((1+x^2)\arctan(x)+(1+x)\ln(1+x))}\\
&= \frac{x-x^2}{(1+x^2)\arctan(x)+(1+x)\ln(1+x)}
\end{aligned}$$

Erneutes Anwenden von de l'Hospital liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-x^2)'}{((1+x^2)\arctan(x)+(1+x)\ln(1+x))'} &= \frac{1-2x}{2x\arctan(x)+1+\ln(1+x)+1}\\
&= \frac{1}{2x\arctan(x)+\ln(1+x)+2}-\frac{2x}{2x\arctan(x)+\ln(1+x)+2}\\
&= \frac{1}{\underbrace{2x\arctan(x)+\ln(1+x)+2}_{\to\infty}}-\frac{2}{2\underbrace{\arctan(x)}_{\to\frac{\pi}{2}}+\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}} \overset{n\to\infty}{\to} -\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Somit existiert auch der gesuchte Grenzwert und es gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\arctan(x)}=-\frac{2}{\pi}$$

3. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \operatorname{arccot}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie für diese Funktion den maximalen Definitionsbereich, den Stetigkeitsbereich, das Monotonieverhalten, alle lokalen und globalen Extrema und untersuchen Sie das Verhalten am Rand des Definitionsbereiches.

Lösung:

(a) Definitionsbereich: Die Funktion $f(x) = \operatorname{arccot}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$ ist für alle $x \neq 0$ definiert, für die Stelle $x = 0$ ist die Funktion $f(x)$ durch $f(0) := 0$ aber separat definiert, also ist f für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, d.h. $D(f) = \mathbb{R}$.

(b) Stetigkeitsbereich: Für $x \neq 0$ ist $f(x)$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig. Zu überprüfen ist nur der separat definierte Punkt 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arccot}(\underbrace{x + \frac{1}{x^2}}_{\to\infty}) = \lim_{y\to\infty} \operatorname{arccot}(y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arccot}(\underbrace{x + \frac{1}{x^2}}_{\to\infty}) = \lim_{y\to\infty} \operatorname{arccot}(y) = 0$$

Es gilt also

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0),$$

also ist $f(x)$ stetig in 0.

(c) Monotonieverhalten: Wir berechnen zunächst f' und f'':
Für $x \neq 0$ gilt

$$f' = -\frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^2}\left(1 - \frac{2}{x^3}\right).$$

Auf gemeinsamen Nenner gebracht und gekürzt ergibt sich für $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{2x - x^4}{x^6 + x^4 + 2x^3 + 1}.$$

Daraus ergibt sich für f'' ($x \neq 0$) durch Anwenden der Quotientenregel

$$f''(x) = \frac{(2 - 4x^3)(x^6 + x^4 + 2x^3 + 1) - (2x - x^4)(6x^5 + 4x^3 + 6x^2)}{(x^6 + x^4 + 2x^3 + 1)^2}.$$

(Da mit f'' später nicht mehr weitergerechnet wird, verzichten wir hier auf weitere Vereinfachung.)

Da der Nenner von $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist ($x^6+x^4+2x^3+1 = (x^6+2x^3+1)+x^4 = (x^3+1)^2 + x^4!$), hängt das Vorzeichen von $f'(x)$ nur von dessen Zähler ab. Es gilt:

(i) $2x - x^4 = x(2 - x^3) < 0$, falls $x < 0$ und $x < +\sqrt[3]{2}$ ist bzw. falls $x > 0$ und $x > \sqrt[3]{2}$ und

(ii) $2x - x^4 = x(2 - x^3) > 0$, falls $x > 0$ und $x < +\sqrt[3]{2}$.

Somit ergibt sich:

- f ist monoton fallend für $x < 0$ und $x > \sqrt[3]{2}$
- f ist monoton wachsend für $0 < x < \sqrt[3]{2}$.

(d) Lokale Extrema: Als Kandidaten für lokale Extrema kommen alle Punkte x^* in Frage, für die entweder $f'(x^*) = 0$ gilt oder die Rand des Definitionsbereiches sind (bzw. die separat definiert sind). Wir untersuchen also zunächst $f'(x) = 0$. Daraus folgt $2x - x^4 = x(2 - x^3) = 0$. Diese Gleichung besitzt im Reellen die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt[3]{2}$. Der obige Ausdruck ist aber nur für $x \neq 0$ gültig, also ist hier nur $x_2 = \sqrt[3]{2}$ zu untersuchen ($x = 0$ muss später als "separat" definierter Punkt sowieso noch getrennt untersucht werden). Um festzustellen, ob x_2 ein lokales Extremum darstellt, müssen wir $f''(x_2)$ berechnen. Es gilt $f''(x_2) < 0$, also liegt an der Stelle $(x_2, f(x_2)) \approx (1.25, 0.48)$ ein lokales Maximum vor. Beachten Sie, dass es sich dabei nur um ein lokales Maximum handelt. Bei der Untersuchung des Verhaltens von $f(x)$ für $x \to -\infty$ wird sich herausstellen, dass $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pi$, d.h. $f(x)$ strebt gegen einen Wert, der größer als $f(x_2)$ ist. Somit ist x_2 nur ein lokales Maximum. Es gibt kein globales Maximum.

Nun muss noch die Stelle $x = 0$ untersucht werden (da die obige Formel für f' ja nicht für $x = 0$ galt und somit an dieser Stelle auch ein Extremum vorliegen könnte): Da $\operatorname{arccot} y\ > 0$ ist für alle $y \in \mathbb{R}$, liegt an der Stelle $x = 0$ sogar ein *globales* Minimum der Funktion f vor (es gilt ja $0 = f(0) < f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

(e) Verhalten für $x \to \pm\infty$: Da arccot eine stetige Funktion ist, können Funktionsauswertung und Limesbildung vertauscht werden und es ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \operatorname{arccot} \lim_{x\to\infty}\left(x + \frac{1}{x^2}\right).$$

Da $\lim_{x\to\infty}(x + \frac{1}{x^2}) = \infty$ und $\lim_{y\to\infty} \operatorname{arccot} y = 0$ folgt somit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Analog ergibt sich wegen $\lim_{y\to-\infty} \operatorname{arccot} y = \pi$ für $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \pi.$$

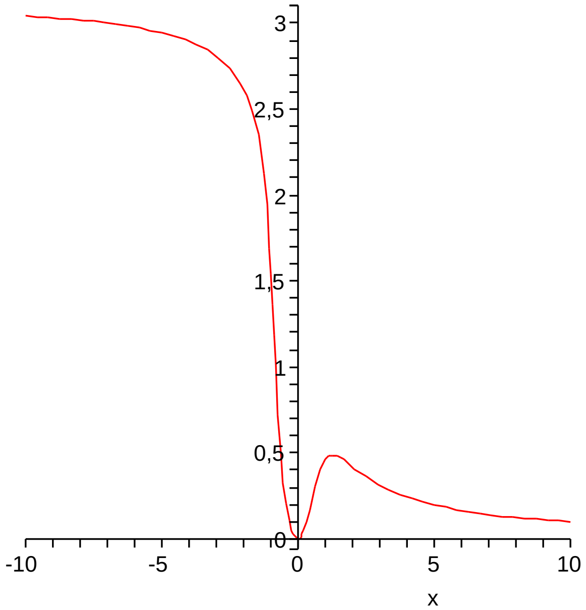

Abbildung 1: Graph der Funktion $f(x) = \operatorname{arccot}(x + 1/x^2)$

4. Man diskutiere die Funktion
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + |x+1|$$
und bestimme dabei Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonie, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten. Weiters fertige man eine Skizze an.

<u>Lösung:</u>

(a) Definitionsbereich: An der Stelle $x = 1$ besitzt $f(x)$ eine Polstelle, sonst ist $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und somit erhalten wir $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

(b) Nullstellen: Im weiteren lösen wir den Betrag auf und unterscheiden folgende zwei Fälle:
   (i) $x < -1$: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} - x - 1$
   (ii) $x \geq -1$: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + x + 1$

   In allen weiteren Betrachtungen werden die obigen zwei Fälle getrennt untersucht.
   (i) $\frac{x^2+1}{x-1} - x - 1 = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit $x^2 + 1 = (x+1)(x-1)$ bzw. $x^2 - 1 = x^2 + 1$, und dies liefert $-1 = 1$, also gibt es keine Nullstelle.
   (ii) $\frac{x^2+1}{x-1} + x + 1 = 0$. Dies führt zu $x^2 + 1 = -(x+1)(x-1)$, weiter zu $x^2 + 1 = -x^2 + 1$, und somit erhalten wir die doppelte Nullstelle $x_{1,2} = 0$, also $N_1(0,0) = N_2(0,0)$.

(c) Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte:
   (i) Zunächst formen wir $f(x)$ etwas um:
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} - x - 1 = \frac{x^2+1-x^2-x+x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

Abgeleitet erhalten wir

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

Da $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$ gilt, folgt daraus, dass $f(x)$ auf $(-\infty, -1)$ monoton fallend ist.
Setzen wir $f'(x) = 0$, so ergibt sich $0 = 2$, was ein Widerspruch ist, also gibt es keine Extremwerte.
Analog führt $f''(x) = 0$ zu $4 = 0$, also haben wir auch keinen Wendepunkt für $x < -1$.

(ii) Zunächst formen wir $f(x)$ wieder um:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + x + 1 = \frac{x^2+1+x^2-1}{x-1} = \frac{2x^2}{x-1}$$

Abgeleitet erhalten wir

$$f'(x) = \frac{4x(x-1)-2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2-4x)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

Um die Monotonie zu bestimmen, suchen wir nach $x \in (-1, \infty)$, sodass $f'(x) \geq 0$ (monoton steigend) bzw. $f'(x) \leq 0$ (monoton fallend) gilt. Bestimmen wir zuerst die Nullstellen von $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 2$$

Somit ist $f'(x) > 0$ für $x > 2$ oder $x < 0$ und $f'(x) < 0$ für $0 < x < 2$. Da wir uns nur im Intervall $(-1, \infty)$ aufhalten, folgt daraus: f ist streng monoton fallend für $x \in (0, 2)$ und streng monoton steigend für $x \in (-1, 0) \cup (2, \infty)$.
Fassen wir somit das Monotonieverhalten zusammen: f is streng monoton fallend im Intervall $(-\infty, -1)$, streng monton steigend in $(-1, 0)$, dann streng monoton fallend in $(0, 2)$ und schließlich wieder streng monoton steigend in $(2, \infty)$.
Nun wollen wir noch die Extremwerte berechnen. Dazu setzen wir $f'(x) = 0$. Das haben wir bereits oben gemacht. Es ergeben sich $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ als x-Werte für die Extremstellen. Der kritische Punkt $x_1 = 0$ ist ein lokales Maximum weil $f''(x) < 0$ und der kritische Punkt $x_2 = 2$ ist ein lokales Minimum weil $f''(2) > 0$.
Wie in Punkt (i) gibt es auch hier keinen Wendepunkt (da $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt).

Nun müssen wir noch untersuchen, ob der Punkt $x = -1$ ein Extremum ist, da die Funktion hier nicht differenzierbar ist.
Die Funktion fällt im Intervall $(-\infty, -1)$ streng monoton und steigt im Intervall $(-1, 0)$ streng monoton. Weiters ist sie im Punkt -1 stetig ist, weil

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x-1} = -1$$

und

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2}{x-1} = -1$$

gilt. Daher besitzt die Funktion f an der Stelle $x = -1$ ein lokales Minimum.

(d) Asymptoten:

(i) Für $x \to -\infty$ hat $f(x) = \frac{2}{x-1}$ die Asymptote $y = 0$.

(ii) Bei der Polstelle haben wir die Asymptote $x = 1$. Nun berechnen wir jene für $x \to \infty$:

$$\alpha = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

$$\beta = \lim_{x \to \infty} (f(x) - \alpha x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Somit erhalten wir die Asymptote: $y = \alpha x + \beta = 2x + 2$.

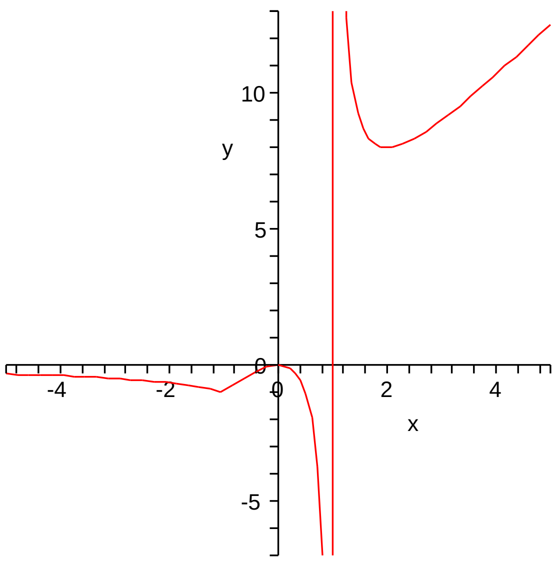

Abbildung 2: Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + |x+1|$