

Tutorium Mathematik I M WM Lösungen

26.11.2010

1. (a) Das Quotientenkriterium soll zur Bestimmung des Konvergenzradius R angewendet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (2^{n+1} + 1) \cdot n}{(n+1) \cdot (-1)^{n-1} (2^n + 1)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \frac{(2^{n+1} + 1)}{(2^n + 1)} \right| = 2 \end{aligned}$$

Die Potenzreihe konvergiert daher für

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$$

absolut. Wir erhalten als Konvergenzkreis das Intervall $(0, 1)$.

Für $x = 0$ lauten die Reihenglieder

$$\frac{(-1)^n (2^n + 1)}{n} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1 + 2^{-n}}{n} > \frac{1}{n}$$

und damit erhalten wir Divergenz mit dem Minoranten-/Majorantenkriterium.

Für $x = 1$ sind die Glieder

$$\frac{(-1)^n (2^n + 1)}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^n = (-1)^n \frac{1 + 2^{-n}}{n}$$

alternierend und ihr Betrag ist streng monoton fallend (2^{-n} ist fallend, n wachsend). Mit dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die Reihe konvergiert. Insgesamt erhalten wir Konvergenz der Potenzreihe für $x \in (0, 1]$.

- (b) Man kann das Quotientenkriterium anwenden. Dazu bestimmen wir

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1 - (-2)^{-n-2} (n+1)!) n!}{(n+1)! (1 - (-2)^{-n-1} n!)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-2)^{-n-2} - \frac{1}{(n+1)!}}{(-2)^{-n-1} - \frac{1}{n!}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{2}}{\frac{(-2)^{n+1}}{n!} - 1} \right| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt ein Konvergenzradius von 2 und für $x \in (0, 4)$ konvergiert die Reihe absolut, für $|x - 2| > 2$ divergiert sie.

Im Randpunkt $x = 0$ lautet die Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-2)^{-n-1} n!}{n!} (-2)^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-2)^n}{n!} + \frac{1}{2} \right] \right).$$

Da $(1/2) + ((-2)^n/n!) \rightarrow (1/2)$ ($n \rightarrow \infty$), bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, die Reihe divergiert also.

Im Randpunkt $x = 4$ erhält man analog die Reihenglieder $(2^n/n!) + ((-1)^n/2)$, die ebenfalls keine Nullfolge bilden. Auch hier divergiert die Reihe. Die Reihe konvergiert demnach genau für $x \in (0, 4)$.

(c) Hier wenden wir zur Bestimmung des Konvergenzradius R das Wurzelkriterium an. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \left| \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \left| \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \right)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Potenzreihe nach dem Wurzelkriterium für $|x+1| < 2$, d. h. $x \in (-3, 1)$. Sie divergiert für $|x+1| > 2$.

Wenn $|x+1| = 2$ ist, zeigt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\frac{2^n}{n^2} \left| \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right)^n \right| \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{2(n-1)}{n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \right)} \right)^n \leq \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

dass durch $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2})$ eine konvergente Majorante gegeben ist. Also konvergiert die Potenzreihe für $x = 1$ und $x = -3$, insgesamt also für $x \in [-3, 1]$.

2. Die geometrische Reihe ist

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{für } |q| < 1.$$

Setzen wir $q = z/2$, so erhalten wir

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n \quad \text{für } |z| < 2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 + z^3) \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \frac{9}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \end{aligned}$$

für $|z| < 2$