Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
5.11.2010

1a. $ae^x - be^{-x} = 0 \qquad (a, b > 0)$

$$\begin{aligned}
ae^x - be^{-x} &= 0 \\
ae^x &= be^{-x} \\
e^{2x} &= \frac{b}{a} \\
2x &= \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\
x &= \frac{1}{2}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) \\
x &= \ln(\sqrt{b}) - \ln(\sqrt{a})
\end{aligned}$$

1b. $\frac{\tan(x)+1}{\sin(x)-\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(x)+1}{\sin(x)-\cos(x)} &= \frac{1}{\cos(x)} \\
\left(\frac{\sin(x)}{\cos x} + 1\right)\cos(x) &= \sin(x) - \cos(x) \\
\sin(x) + \cos(x) &= \sin(x) - \cos(x) \\
2\cos(x) &= 0 \\
\cos(x) &= 0
\end{aligned}$$

Da $\cos(x) \neq 0$ gelten muss, weil sonst die rechte Seite der Angabe nicht definiert ist, ist die Lösungsmenge leer.

1c. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0.$

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) &= 0 \\
\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin(2x + x) &= 0 \\
\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) &= 0 \\
\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + (2\sin(x)\cos(x))\cos(x) + \sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) &= 0 \\
\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) &= 0 \\
\sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3\cos^2(x) - \sin^2(x)) &= 0 \\
\sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) &= 0 \\
\sin(x)(2\cos(x) + 4\cos^2(x)) &= 0 \\
2\sin(x)\cos(x)(1 + 2\cos(x)) &= 0
\end{aligned}$$

Das Produkt ist Null genau dann wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist. Daher ergibt sich die Lösungsmenge aus allen Lösungen von $\sin(x) = 0$ und $\cos(x) = 0$ und $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, also

$$L = \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$$

2a.

$$\begin{aligned} &\ln(2x) + \ln(2y) - \ln z - \ln 4 \\ &\quad = \ln 2 + \ln x + \ln 2 + \ln y - \ln z - 2\ln 2 \\ &\quad = \ln x + \ln y - \ln z \\ &\quad = \ln(\frac{xy}{z})\,. \end{aligned}$$

2b.

$$\begin{aligned} &\ln(x^2 - y^2) - \ln(2(x-y)) \\ &\quad = \ln((x+y)(x-y)) - \ln 2 - \ln(x-y) \\ &\quad = \ln(x+y) - \ln 2\,. \end{aligned}$$

2c.

$$\ln(x^{\frac{2}{3}}) - \ln(\sqrt[3]{x^{-4}}) = \frac{2}{3}\ln x + \frac{4}{3}\ln x \;\; = \;\; 2\ln x\,.$$