Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
29.10.2010

1. Sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

$$\langle (\vec{a} \times \vec{b}), (\vec{c} \times \vec{d}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \tag{1}$$

Es gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} c_2d_3 - c_3d_2 \\ c_3d_1 - c_1d_3 \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren liefert

$$\begin{aligned} \langle (\vec{a} \times \vec{b}), (\vec{c} \times \vec{d}) \rangle &= a_2b_3c_2d_3 - a_2b_3c_3d_2 - a_3b_2c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 + \\ &+ a_3b_1c_3d_1 - a_3b_1c_1d_3 - a_1b_3c_3d_1 + a_3b_1c_1d_3 + \\ &+ \quad a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1 \end{aligned}$$

Für die rechte Seite von (1) gilt:

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)(a1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)$$

Durch Ausmultiplizieren sieht man sofort, dass beide Seiten in (1) gleich sind!

2. Interpolieren Sie die Punkte

$$(x, y) = \{(-1, -9), (1, -1), (2, -3), (3, -9)\}$$

mit einem Polynom möglichst niedrigen Grades.

Einsetzen in die Lagrange'sche Interpolationsformel liefert

$$\begin{aligned} p(x) &= -9\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} - 1\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} \\ &- 3\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} - 9\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{3}{8}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-3) \\ &+ (x+1)(x-1)(x-3) - \frac{9}{8}(x+1)(x-1)(x-2) \\ &= -2x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$