Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
15.10.2010

1. Man bestimme die Quadratwurzeln der komplexen Zahl
$$\frac{(3+4i)^3}{(3-4i)^2}.$$
Es gilt
$$(3+4i)^3 = 3^3 + 3(3^2 \cdot 4i) + 3(3 \cdot (4i)^2) + (4i)^3 = 27 + 108i - 144 - 64i = -117 + 44i$$
und
$$(3-4i)^2 = 9 - 2(3 \cdot (4i)) + (4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$$
und daraus folgt
$$\frac{(3+4i)^3}{(3-4i)^2} = \frac{(-117+44i)(-7+24i)}{(-7-24i)(-7+24i)} = \frac{-237-3116i}{625}.$$
Wandelt man die Zahl in Polarform um, erhält man den Betrag
$$\sqrt{\frac{237^2}{625^2} + \frac{3116^2}{625^2}} = 5$$
und das Argument
$$\arctan \frac{3116}{237} - \pi = -1.64671$$
Somit gilt für die beiden Wurzeln
$$\sqrt{5}\,(\cos(-0.82335) + i\sin(-0.82335)) = 1.52 - 1.64i$$
und
$$\sqrt{5}\,(\cos(-0.82335+\pi) + i\sin(-0.82335+\pi)) = -1.52 + 1.64i.$$

2. Welche Menge von Punkten in der komplexen Ebene wird durch die Gleichung
$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| = 2|z+3|\}$$
beschrieben?
Schreiben wir z in der Form $z = a + bi$, dann gilt
$$|a+bi-3| = \sqrt{(a-3)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 9 + b^2}$$
und
$$2|a+bi+3| = 2\sqrt{(a+3)^2 + b^2} = 2\sqrt{a^2 + 6a + 9 + b^2}.$$
Daraus folgt, dass für alle $z \in M$ die Gleichungen
$$a^2 - 6a + 9 + b^2 = 4(a^2 + 6a + 9 + b^2)$$
und
$$0 = b^2 + 10a + a^2 + 9$$
gelten. Diese Gleichung ist äquivalent zu $(a+5)^2 + b^2 = 16$ und beschreibt einen Kreis in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt $(-5, 0)$ und Radius $\sqrt{16} = 4$.

3. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{n+1}\, \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Wir beweisen zunächst die erste Formel mittels vollständiger Induktion:

(a) Induktionsanfang bei $n = 1$:
$1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2 = 1$ stimmt.

(b) Induktionsannahme: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(c) Induktionsbehauptung: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2$

(d) Induktionsschritt, $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{IA}}{=} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{4} = \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} = \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Auch die zweite Formel lässt sich mit einem Standard-Induktionsbeweis zeigen:

(a) Induktionsanfang bei $n = 1$:
$(-1)^2 \cdot 1 = (-1)^2\, \frac{1 \cdot 2}{2}$ stimmt.

(b) Induktionsannahme:
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{n+1}\, \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(c) Induktionsbehauptung:
$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{n+2}\, \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

(d) Induktionsschritt, $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1}\, k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2 + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2 \overset{\text{Ann.}}{=} \\
&= (-1)^{n+1}\,\frac{n\,(n+1)}{2} + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2 = \\
&= (-1)^{n+1}\,\left\{\frac{n\,(n+1)}{2} - \frac{2\,(n+1)^2}{2}\right\} = \\
&= (-1)^{n+1}\,\frac{(n-2n-2)\,(n+1)}{2} = \\
&= (-1)^{n+2}\,\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}
\end{aligned}$$