

Tutorium Mathematik I M WM Lösungen

28.1.2011

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & p \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A)$ und die Menge aller $p \in \mathbb{R}$ für die A regulär ist.

Lösung:

Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & p \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & p \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & p \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-2p + 3) - (2p - 9) + (-2 + 6) = -4p + 16. \end{aligned}$$

Die Matrix A ist genau dann regulär, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt, d.h. $p \neq 4$.

2. Berechnen Sie die Lösungsmenge des komplexen linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 &+ ix_3 = i \\ x_1 - 3x_2 - ix_3 &= 2i \\ ix_1 + x_2 + x_3 &= 1 + i \end{aligned}$$

Lösung:

Wir wenden elementare Zeilenumformungen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix an:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & i & i \\ 1 & -3 & -i & 2i \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 2 & 0 & i & i \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 0 & 6 & 3i & -3i \\ 0 & 1+3i & 0 & 3+i \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 0 & 2 & i & -i \\ 0 & 2+6i & 0 & 6+2i \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 0 & 2 & i & -i \\ 0 & 2+6i & 0 & 6+2i \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 0 & 2 & i & -i \\ 0 & 0 & 3-i & 3+3i \end{array} \right) \end{aligned}$$

Es gibt also eine eindeutige Lösung und zwar

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3+3i}{3-i} = \frac{1}{10}(3+3i)(3+i) = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} \cdot i, \\ x_2 &= \frac{-i - ix_3}{2} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot i, \\ x_1 &= 2i + 3x_2 + ix_3 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot i, \end{aligned}$$

also ist $L = \{\frac{1}{5}(3 + i, 3 - 4i, 3 + 6i)\}$ die Lösungsmenge.