Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
14.1.2011

1. Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differenzialgleichung mit Exponenten $\alpha = -1$. Wir müssen also die Substitution $u(x) = (v(x))^\lambda$ mit

$$\lambda = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

durchführen. Mit

$$u'(x) = \frac{1}{2}\,(v(x))^{-1/2}\,v'(x)$$

folgt durch Einsetzen in die Differenzialgleichung

$$\frac{1}{2}\,(v(x))^{-1/2}\,v'(x) = \frac{1}{2x}\,(v(x))^{1/2} - \frac{1}{2}\,(v(x))^{-1/2}.$$

Nach Multiplikation der Gleichung mit $2\,(v(x))^{1/2}$ erhalten wir die lineare Differenzialgleichung

$$v'(x) = \frac{1}{x}\,v(x) - 1, \qquad x \in (0,1).$$

Durch Separation ergibt sich die Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung als

$$v_{\mathrm{h}}(x) = C\,x, x \in (0,1),$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Die Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ermitteln wir durch Variation der Konstanten,

$$v_{\mathrm{p}}(x) = C(x)\,x, \qquad v_{\mathrm{p}}'(x) = C(x) + C'(x)\,x.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$C(x) + C'(x)\,x = C(x) - 1, \qquad \text{also} \quad C'(x) = -\frac{1}{x}.$$

Dies liefert die Funktion $C(x) = -\ln x$ und die partikuläre Lösung

$$v_{\mathrm{p}}(x) = -x\,\ln x, \qquad x \in (0,1).$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung ist demnach

$$v(x) = x\,(C - \ln x), \qquad x \in (0,1).$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$u(x) = (x\,(C - \ln x))^{1/2}\,, \qquad x \in (0,1).$$

Damit u reellwertig ist, muss $x\,(C - \ln x)$ für alle $x \in (0,1)$ größer oder gleich null sein. Dies ist für $C \geq 0$ der Fall.

2. Indem wir die rechte Seite umschreiben zu

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{y(x)}\right)^2 + \frac{x}{y(x)}},$$

identifizieren wir die Differenzialgleichung als eine homogen Differenzialgleichung. Mit der Substitution $z(x) = y(x)/x$ und dementsprechend

$$y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$$

erhalten wir

$$z(x) + x\,z'(x) = 1 + \frac{x^2\,(z(x))^2}{x^2(1 + z(x)} = 1 + \frac{(z(x))^2}{1 + z(x)}.$$

Es folgt

$$z'(x) = \frac{1}{x\,(1+z(x))}.$$

Durch Separation ergibt sich

$$z(x) + \frac{1}{2}\,(z(x))^2 + \frac{1}{2} = \ln x + \frac{C}{2}.$$

Der Summand 1/2 auf der linken Seite ist einfach eine geschickt gewählte Integrationskonstante, denn es folgt nun

$$z(x) = -1 \pm \sqrt{2\ln x + C}, \qquad x > 0.$$

Damit ist

$$y(x) = x\left(-1 \pm \sqrt{2\ln x + C}\right), \qquad x > 0.$$

3. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a.) $y' = \frac{x+y+1}{2x+2y+1}$, $y(1) = -\frac{4}{3}$.

Lösung:

Es handelt sich um eine Differentialgleichung der Form $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$. Da $ax + by = \lambda(\alpha x + \beta y)$ gilt, d.h.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

verwenden wir die Substitution $z(x) = x + y(x) + 1$ (d.h. der Zähler wird durch z ersetzt - der Nenner wäre ebenso möglich). Daraus ergibt sich $z' = 1 + y'$ bzw. $y' = z' - 1$ und in die Differentialgleichung eingesetzt, erhält man

$$z' - 1 = \frac{z}{2z-1} \qquad \text{bzw.} \qquad z' = \frac{3z-1}{2z-1}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Veränderlichen lösen.

$$\int \frac{2z-1}{3z-1}\,dz = \int dx$$

Der Integrand links ist eine rationale Funktion, für die zuerst eine Polynomdivision durchgeführt wird:

$$(2z-1) : (3z-1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3z-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9z-3}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{2z-1}{3z-1}\,dz &= \int \frac{2}{3} - \frac{1}{9z-3}\,dz \\ &= \frac{2}{3}z - \ln(9z-3)\frac{1}{9} + C_1\end{aligned}$$

$$\int dx = \int 1\,dx = x + C_2$$

Somit erhält man als Lösung

$$\frac{2}{3}z - \frac{1}{9}\ln(3z-1) = x + C_3$$

bzw. rückeingesetzt

$$\frac{2}{3}(x+y+1) - \frac{1}{9}\ln(3(x+y+1)-1) = x + C_3.$$

Einige Vereinfachungen führen schliesslich auf

$$6y - \ln(3x+3y+2) = 3x + C.$$

Nun wollen wir noch den Wert der Konstante C wissen. Wir setzen daher den Anfangswert ein:

$$6\left(-\frac{4}{3}\right) - \ln(3-4+2) = 3 + C \qquad \Longleftrightarrow \qquad C = -11.$$

Damit erhalten wir als Lösung:

$$6y - \ln(3x+3y+2) = 3x - 11.$$

b.) $y' = \frac{2x-y+3}{x-y+2}$, $y(0) = 1$.
Lösung:
Auch das ist eine Differentialgleichung der Form $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ aber es gibt kein λ mit $ax + by = \lambda(\alpha x + \beta y)$. Ziel ist es vorerst, die Konstanten c und γ zu eliminieren, um anschliessend die Transformation $\frac{y}{x}$ anzuwenden. Also lösen wir zuerst das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ x - y &= -2 \end{aligned}$$

und erhalten $(x_0, y_0) = (-1, 1)$. Daher verwendet man die Substitution $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x - x_0, y - y_0) = (x+1, y-1)$. Für die neuen Variablen lautet die Differentialgleichung

$$\tilde{y}' = \frac{2\tilde{x} - \tilde{y}}{\tilde{x} - \tilde{y}}.$$

Nun wird auf der rechten Seite durch x dividiert

$$\tilde{y}' = \frac{2 - \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{1 - \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}.$$

und wie folgt substituiert $z = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ also $\tilde{x}z = \tilde{y}$. Beidseitiges Differenzieren ergibt $z + \tilde{x}z' = y'$ (Achtung: Kettenregel).
Die Differentialgleichung lautet dann

$$z + \tilde{x}z' = \frac{2-z}{1-z}$$

und daher

$$\tilde{x}z' = \frac{2-z}{1-z} - z = \frac{z^2 - 2z + 2}{1-z}.$$

Diese Differentialgleichung kann man durch Trennung der Veränderlichen lösen:

$$\int \frac{1-z}{z^2-2z+2}\, dz = \int \frac{1}{\tilde{x}}\, dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{1-z}{z^2-2z+2}\, dz &= -\frac{1}{2} \int \frac{2z-2}{z^2-2z+2}\, dz \\ &= -\frac{1}{2} \ln(z^2 - 2z + 2) + C_1 \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-2z+2}}\right) + C_1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\tilde{x}}\, dx = \ln(\tilde{x}) + C_2$$

Also erhält man

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-2z+2}}\right) = \ln(\tilde{x}) + C_3$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-2z+2}} = C_4\tilde{x}.$$

Das soll nach z aufgelöst werden:

$$1 = C\tilde{x}^2(z^2-2z+2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^2-2z+(2-\frac{1}{C\tilde{x}^2}) = 0$$

und nun liegt eine quadratische Gleichung vor, wonach folgt

$$z_1 = 1+\sqrt{\frac{1}{C\tilde{x}^2}-1}, \qquad z_2 = 1-\sqrt{\frac{1}{C\tilde{x}^2}-1}.$$

Nun wird rücksubstituiert mit $z=\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}=\frac{y-1}{x+1}$. Wir erhalten die zwei Lösungsgruppen

$$\frac{y-1}{x+1} = 1+\sqrt{\frac{1}{C(x+1)^2}-1}, \qquad \frac{y-1}{x+1} = 1-\sqrt{\frac{1}{C(x+1)^2}-1}.$$

Setzt man nun den Anfangswert ein, so bekommt man für die erste Lösungsgruppe

$$0 = 1+\sqrt{\frac{1}{C}-1}.$$

Dafür gibt es aber keine reelle Lösung. Also muss die gesuchte Lösung der zweiten Lösungsgruppe angehören:

$$0 = 1-\sqrt{\frac{1}{C}-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C=\frac{1}{2}.$$

Und nun lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{y-1}{x+1} = 1-\sqrt{\frac{2}{(x+1)^2}-1}$$

was sich noch wie folgt vereinfachen lässt

$$y = x+2-\sqrt{-x^2-2x+3}.$$

4. Riccati'sche Differentialgleichung:

$$y' = (1-x)y^2+(2x-1)y-x.$$

Lösung:
Um die Riccati-Dgl. auf eine Bernoulli-Dgl. zu transformieren, benötigt man eine partikuläre Lösung. Wir versuchen es mit folgendem Ansatz: $y_1(x)=ax+b$ (da die Differentialgleichung nur Polynome 1. Grades enthält). Es gilt:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= ax+b \\ y_1'(x) &= a \\ a &= (1-x)(ax+b)^2+(2x-1)(ax+b)-x \end{aligned}$$

Obige Gleichung gilt für alle x (Koeffizientenvergleich!), wenn $a=0$ und $b=1$ gilt. Das heisst wir haben eine partikuläre Lösung $y_1(x)=1$ gefunden. Nun wird wie folgt transformiert:

$$y(x)=y_1(x)+v(x) \iff y=1+v$$

Es gilt $y'=v'$ und in die Differentialgleichung eingesetzt und vereinfacht, erhalten wir

$$v' = (1-x)(1+v)^2+(2x-1)(1+v)-x = v^2(1-x)+v.$$

Nun liegt eine Bernoulli-Dgl. mit $\alpha=2$ vor. Also wird $z(x)=v^{1-\alpha}=\frac{1}{v}$ substituiert:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{z} \\ v' &= -\frac{1}{z^2} z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2} z' &= \frac{1}{z^2}(1-x) + \frac{1}{z} \\ -z' &= 1 - x + z \\ z' &= -z + x - 1 \end{aligned}$$

Nun liegt eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vor. Zuerst betrachten wir die homogene Gleichung $z' = -z$. Die löst man durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{1}{z}\, dz = -\int dx \iff \ln z = -x + \tilde{C} \iff z = Ce^{-x}.$$

Nun kennen wir die allgemeine Lösung $z_{hom} = Ce^{-x}$ der homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung hat die Form $z_{allg} = z_{hom} + z_{part}$, wobei z_{part} eine partikuäre Lösung der inhomogenen Gleichung ist. z_{part} wird durch Variation der Konstanten berechnet, d.h. man betrachtet z_{hom} und sieht die Konstante C als Funktion von x. Man versucht also eine partikuläre Lösung der Form $C(x)e^{-x}$ zu finden:

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)e^{-x} \\ y' &= C'e^{-x} - Ce^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'e^{-x} - Ce^{-x} &= -Ce^{-x} + x - 1 \\ C' &= e^x(x-1) \\ C &= \int e^x(x-1)\, dx = e^x(x-2) + C_1 \end{aligned}$$

Das letzte Integral wurde durch partielle Integration gelöst. Wir haben nun eine Funktion $C(x) = e^x(x-2) + C_1$ gefunden, sodass $C(x)e^{-x}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist. Da wir nur eine beliebige partikuläre Lösung benötigen, können wir C_1 beliebig wählen, z.B. $C_1 = 0$. Also gilt $z_{part} = C(x)e^{-x} = e^x(x-2)e^{-x} = x - 2$.

$$z_{allg} = z_{hom} + z_{part} = Ce^{-x} + x - 2$$

Durch Rücksubsitution erhält man $v = \frac{1}{Ce^{-x}+x-2}$ und schliesslich

$$y = v + 1 = \frac{1}{Ce^{-x} + x - 2} + 1.$$