Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
7.1.2011

(1a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx$

Die naheliegendste Substitution ist $u = \mathrm{e}^x$:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x \\ du = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \\ &= \int \frac{u}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u^2+1}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + 1 \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \mathrm{e}^{2x} + 1 \right| + C\,; \end{aligned}$$

(1b) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$

Hier substituieren wir für den Logarithmus:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u \end{matrix} \right| = \int u^2\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C\,. \end{aligned}$$

(1c) $\displaystyle\int e^x \cosh(e^x) e^{(e^x)}\, dx$

Hier substituiert man $u = \mathrm{e}^x$:

$$\begin{aligned} I &= \int \mathrm{e}^x\, \cosh(\mathrm{e}^x)\, \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \\ &= \int \cosh(u)\, \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int \left(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \right)\, \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\mathrm{e}^{2u} + 1 \right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \mathrm{e}^{2u} + u \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^x \right] + C \end{aligned}$$

(1d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-27)\, dx}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

Nullsetzen des Nenners liefert

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x\,(x^2 - 2x - 3) = 0$$

und mit $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+3}$ setzen wir eine Partialbruchzerlegung an

$$\frac{x-27}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner liefert

$$x - 27 = A\,(x-3)\,(x+1) + B\,x\,(x+1) + C\,x\,(x-3)\,,$$

und die Einsetzmethode ergibt

$$\begin{array}{rll} x = 0: & -27 = -3A & A = 9 \\ x = 3: & -24 = -12B & B = -2 \\ x = -1: & -28 = 4C & C = -7\,. \end{array}$$

Damit können wir das Integral sofort ermitteln:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\frac{9}{x} - \frac{2}{x-3} - \frac{7}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= [9 \ln|x| - 2 \ln|x-3| - 7 \ln|x+1|]_1^2 \\ &= 9 (\ln 2 - \ln 1) - 2 (\ln 1 - \ln 2) - 7 (\ln 3 - \ln 2) \\ &= 18 \ln 2 - 7 \ln 3 \end{aligned}$$

(1e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - 6x - 7}{(x-2)^2(x^2+1)}\, dx$

Die Polynomdivision entfällt wegen Grad Zähler $= 2 < 4 =$ Grad Nenner. Nun setzen wir eine Partialbruchzerlegung an

$$\frac{x^2 - 6x - 7}{(x-2)^2\,(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}$$

Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner ergibt

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 7 = {}& A\,(x-2)\,(x^2+1) + B\,(x^2+1) \\ &+ (Cx + D)\,(x-2)^2\,. \end{aligned}$$

Wir sortieren auf beiden Seiten nach Potenzen:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 7 = {}& (A + C)\,x^3 + (-2A + B - 4C + D)\,x^2 \\ &+ (A + 4C - 4D)\,x + (-2A + B + 4D) \end{aligned}$$

Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + C &= 0\,, \\ -2A + B - 4C + D &= 1\,, \\ A + 4C - 4D &= -6\,, \\ -2A + B + 4D &= -7 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = 2$, $B = -3$, $C = -2$, $D = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2x}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \left[2 \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \ln(x^2+1) \right]_0^1 \\ &= -\frac{3}{2} - 3 \ln 2 \end{aligned}$$

(2) Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung u_h ergibt sich durch Trennung der Veränderlichen,

$$\int \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{h}}{u_\mathrm{h}} = -\int \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es folgt

$$\ln|u_\mathrm{h}(x)| = \tilde{C} - \sin x$$

mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ und daher

$$u_\mathrm{h}(x) = C\,\mathrm{e}^{-\sin x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung machen wir den Ansatz $u_\mathrm{p}(x) = C(x)\,\exp(-\sin(x))$. Ableiten liefert

$$u_\mathrm{p}'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\sin(x)} - C(x)\,\cos(x)\,\mathrm{e}^{-\sin(x)}.$$

Dies setzen wir in die Differenzialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\sin(2x) &= C'(x)\,\mathrm{e}^{-\sin(x)} - C(x)\,\cos(x)\,\mathrm{e}^{-\sin(x)} \\ &\quad + \cos(x)\,C(x)\,\mathrm{e}^{-\sin(x)} \\ &= C'(x)\,\mathrm{e}^{-\sin(x)}.\end{aligned}$$

Wie erwartet heben sich die Terme mit $C(x)$ weg. Es folgt nun

$$C(x) = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $y = \sin(x)$ mit $\mathrm{d}y = \cos(x)\,\mathrm{d}x$ und unter Beachtung von $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ folgt nun

$$C(x) = \int y\,\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{y}\,(y-1) = \mathrm{e}^{\sin(x)}\,(\sin(x)-1).$$

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung

$$u_{\mathrm{p}}(x) = \sin(x) - 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

und die allgemeine Lösung

$$u(x) = u_{\mathrm{p}}(x) + u_{\mathrm{h}}(x) = \sin(x) - 1 + C\,\mathrm{e}^{-\sin x}$$

für $x \in \mathbb{R}$.