Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
17.12.2010

(a) $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4}dx$

Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, also können wir direkt die Methode der Partialbruchzerlegung anwenden. Es ergibt sich dabei

$$\frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{-4}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

Es gilt also

$$I := \int \frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4} = -4\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

und weiter

$$I = -4\,\ln|x-1| + 4\,\ln|x-2| + \frac{3}{x-2} + C.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+4}dx$

Da hier der Grad des Zählerpolynoms größer ist als der des Nennerpolynoms, führen wir zunächst eine Polynomdivision aus und erhalten

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+4} = (x-1) + \frac{-x+4}{x^2+x+4}.$$

Daher ergibt sich

$$I := \int \frac{x^3+2x}{x^2+x+4}dx = \int (x-1)dx + \underbrace{\int \frac{-x+4}{x^2+x+4}dx}_{:=I_1} = \frac{x^2}{2} - x + I_1.$$

Das Polynom x^2+x+4 besitzt keine rellen Nullstellen, also ist der Integrand von I_1 nicht weiter zerlegbar. Zur Berechnung von I_1 teilt man es daher in zwei Integrale derart, dass im Zähler des ersten Integranden die Ableitung des Nennerpolynoms steht. Es ergibt sich

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx + \frac{9}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+x+4}}_{:=I_2} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+x+4) + \frac{9}{2}I_2.$$

I_2 wiederum kann nun berechnet werden, indem man den Nenner quadratisch ergänzt zu

$$x^2+x+4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = \frac{15}{4}\left(\frac{4}{15}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{15}{4}(y^2+1)$$

mit $y := \frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Mit $dx = \frac{\sqrt{15}}{2}dy$ gilt

$$I_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{4}{15}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan y + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C.$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$I = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+4) + \frac{9}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C.$$

(c) $\displaystyle\int x \ln x dx$

Wir verwenden partielle Integration mit $f'(x) = x$ und $g(x) = \ln x$. Dann gilt $f(x) = \frac{x^2}{2}$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx$

Wir verwenden wieder die Methode der partiellen Integration. Hier wird allerdings die Funktion $f'(x)$ künstlich eingeführt:

$$\begin{aligned}f'(x) &:= 1, & g(x) &:= (\ln\, x)^2, \\ f(x) &= x, & g'(x) &= 2\frac{\ln\, x}{x}.\end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned}\int 1(\ln\, x)^2\, dx &= x(\ln\, x)^2 - \int x \cdot 2\frac{\ln\, x}{x} dx\ + C = x(\ln\, x)^2 - 2\int \ln\, x\, dx\ + C \\ &= x(\ln\, x)^2 - 2x(\ln\, x - 1)\ + C = x(\ln\, x)^2 - 2x\, \ln\, x + 2x\ + C.\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

Substituieren wir $u = \tan \frac{x}{2}$, so folgt $\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2}$ sowie $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ (siehe VO-Skriptum!) und weiters

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{2}{1+u^2+2u} du \\ &= \int \frac{2}{(1+u)^2} du = -\frac{2}{u+1} + C = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C.\end{aligned}$$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{(1+e^x)^2}$

Wir substituieren $u = e^x$ und erhalten $x = \ln u$ bzw. $dx = \frac{1}{u} du$. Damit erhält man

$$\int \frac{u}{(1+u)^2} \frac{1}{u} du = \int (1+u)^{-2}\, du = -(1+u)^{-1} + C = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

(g) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\, dx$

Es gilt mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned}I = \int \ln(x^2)\, \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x &= \left| \begin{matrix} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2x}{x^2} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \\ &= -\frac{\ln(x^2)}{x} + \int \frac{2}{x^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} + C.\end{aligned}$$

(h) $\displaystyle\int_0^1 r^2\sqrt{1-r}\, dr$

Partielle Integration führt zu

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r}\, dr \\
&= \left| \begin{matrix} u = r^2 & v' = (1-r)^{1/2} \\ u' = 2r & v = -\frac{2}{3}(1-r)^{3/2} \end{matrix} \right| = \\
&= \underbrace{-\frac{2r^2}{3}(1-r)^{3/2}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{4}{3}\int_0^1 r\,(1-r)^{3/2}\,\mathrm{d}r \\
&= \left| \begin{matrix} u = r & u' = 1 \\ v' = (1-r)^{3/2} & v = -\frac{2}{5}(1-r)^{5/2} \end{matrix} \right| = \\
&= \frac{4}{3}\left\{ \underbrace{-\frac{2r}{5}(1-r)^{5/2}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{2}{5}\int_0^1 (1-r)^{5/2}\,\mathrm{d}r \right\} \\
&= -\frac{4}{3}\,\frac{2}{5}\,\frac{2}{7}\,(1-r)^{7/2}\Big|_0^1 = \frac{16}{105}
\end{aligned}
$$