Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
10.12.2010

1. (a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x(x+1)}\right)$$

Lösung: Dieser Grenzwert hat die Form $\infty-\infty$. Daher erweitern wir den Bruch und erhalten

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x-\sqrt{x(x+1)}\right)\left(x+\sqrt{x(x+1)}\right)}{x+\sqrt{x(x+1)}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x(x+1))}{x+\sqrt{x(x+1)}}$$

Ingesamt folgt also

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x(x+1))}{x+\sqrt{x(x+1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}$$

Dividiert man nun Nenner und Zähler durch x, erhält man

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{2}.$$

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 3}\ln(3-x)\ln(bx)$$

für alle $b>0$!

Lösung: Für dieses Beispiel muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

$0<b<\frac{1}{3}$: In diesem Fall ist $\ln(b\cdot 3)$ negativ. Der Limes hat also die Form $(-\infty)\cdot k$, wobei k eine negative, reelle Zahl ist. Dieser Grenzwert ist $+\infty$.

$\frac{1}{3}<b$: In diesem Fall ist $\ln(b\cdot 3)$ positiv. Der Limes hat also die Form $(-\infty)\cdot k$, wobei k eine positive, reelle Zahl ist. Dieser Grenzwert ist $-\infty$.

$b=\frac{1}{3}$: In diesem Fall ist $\ln(b\cdot 3)=0$. Der Limes hat die Form $(-\infty)\cdot 0$ Das ist eine unbestimmte Form und es muss de l'Hospital angewendet werden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\ln(3-x)\ln(\frac{x}{3}) &= \lim_{x\to 3}\frac{\ln(3-x)}{\frac{1}{\ln(bx)}}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{3-x}}{\frac{-3}{3x\ln(\frac{x}{3})^2}}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{-\ln(\frac{x}{3})^2}{\frac{3-x}{x}}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{-2\frac{\ln(\frac{x}{3})}{x}}{-\frac{3}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{2x\ln(\frac{x}{3})}{3}=0\end{aligned}$$

Dabei wurde von der 1. auf die 2. und von der 3. auf die 4. Zeile de l'Hospital verwendet. Der Grenzwert ist in diesem Fall also 0.

2. Zuerst berechnet man die Ableitungen der Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \cos(e^x - 1) && f(0) = 1 \\
&f'(x) = -\sin(e^x - 1)e^x && f'(0) = 0 \\
&f''(x) = -\cos(e^x - 1)e^{2x} - \sin(e^x - 1)e^x && f''(0) = -1 \\
&g(x) = \sin(\pi\cos(x)) && g(0) = 0 \\
&g'(x) = -\pi\sin(x)\cos(\pi\cos(x)) && g'(0) = 0 \\
&g''(x) = -\pi^2\sin^2(x)\sin(\pi\cos(x)) - \pi\cos(x)\cos(\pi\cos(x)) && g''(0) = \pi
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Taylorentwicklung hat die Form

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathcal{R}_{n+1}$$

wobei mit $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f gemeint ist und $\mathcal{R}_{n+1}$ das $(n+1)$-te Restglied bezeichnet. Wir setzen also in diese Formel ein und erhalten

$$f(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{R}_3$$

und

$$g(x) \approx \frac{\pi}{2}x^2 + \mathcal{R}_3.$$

3. Hier könnte man analog zum obigen Beispiel die einzelnen Ableitungen ausrchnen und in die Taylorformel einsetzen. In diesem Fall gibt es aber eine elegantere und kürzere Möglichkeit, die Taylorreihe der Funktion zu bestimmen. Aus der Vorlesung kennen wir die Taylorreihe

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und

$$e^y = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}.$$

Setzen wir $y = -x$ und berücksichtigen wir nur Glieder bis zur 5. Ordnung. so ergibt sich

$$f(x) \approx \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right).$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Koeffizienten mit gleichen Potenzen in x und Ignorieren aller Terme mit Potenzen größer als 5 erhält man

$$f(x) \approx x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^4 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5$$

bzw.

$$f(x) \approx x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5.$$