Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
8.10.2010

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}$$

Vereinfachen Sie $f(x)$ und skizzieren Sie den Graphen. Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Maximaler Definitionsbereich in $\mathbb{R}$: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Begründung: Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- $x - 3 \neq 0$ wegen Division durch $x - 3$: $x \neq 3$.
- $x + 3 \neq 0$ wegen Division durch $x + 3$: $x \neq -3$.
- $\frac{x+3}{x-3} \geq 0$ als Ausdruck in der Quadratwurzel.
  Das impliziert a) $x + 3 \geq 0$ und $x - 3 > 0$, oder b) $x + 3 \leq 0$ und $x - 3 < 0$.
  In a) $x \geq -3$ und $x > 3 \quad \Longrightarrow \quad x > 3$.
  In b) $x \leq -3$ und $x < 3 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -3$.
  Zusammengefasst: $x > 3$ oder $x \leq -3$
- $\frac{x-3}{x+3} \geq 0$ als Ausdruck in der Quadratwurzel.
  Analoge Rechnung wie im obigen Punkt ergibt $x \geq 3$ oder $x < -3$.
  (Oder man beobachtet, dass $\frac{x+3}{x-3} > 0$ nur dann wenn $\frac{x-3}{x+3} > 0$.)
- $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \neq 0$ da durch diesen Ausdruck dividiert wird.

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \neq \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \Longrightarrow \frac{x+3}{x-3} \neq \frac{x-3}{x+3} \Longrightarrow (x+3)^2 \neq (x-3)^2 \Longrightarrow 6x \neq -6x \Longrightarrow x \neq 0$$

Die Zusammenfassung aller Bedingungen ergibt $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ als Definitionsbereich.

Vereinfachung: $f(x) = \frac{x}{3}$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)} = \frac{\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} + 2}{\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3}} =$$

$$\frac{\frac{(x+3)^2+(x-3)^2+2(x^2-9)}{x^2-9}}{\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{x^2-9}} = \frac{2x^2 + 18 + 2x^2 - 18}{12x} = \frac{4x^2}{12x} = \frac{x}{3}.$$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität:

Wählt man zwei Elemente x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich von f mit $x_1 \neq x_2$ so folgt $f(x_1) = \frac{x_1}{3} \neq \frac{x_2}{3} = f(x_2)$. Daher ist f injektiv.
Es gibt ein Element $y \in \mathbb{R}$, sodass es kein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt, d.h. nicht jedes Element in $\mathbb{R}$ wird als Bild von f getroffen. In unserem Fall erfüllt $y = 1$ diese Bedingung (denn dann müsste $x = 3$ sein aber 3 liegt nicht im Definitionsbereich). Also ist f nicht surjektiv.
Da f nicht surjektiv ist, kann f auch nicht bijektiv sein.

2. Wahrheitstafel:

A	B	C	$(B \vee C)$	$A \wedge (B \vee C)$	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	$(A \wedge B)$	$(A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	f
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

3. (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}, \qquad x \neq 2. \tag{1}$$

Aus (1) ergibt sich

$$1 + |x-1| > |x-2|.$$

Fallunterscheidung:

(i) $\underline{x > 2}$: $1 + x - 1 > x - 2$ bzw. $0 > -2$, also ist $L_1 = \{x \in \mathbb{R}\,|x > 2\}$.
(ii) $\underline{1 \leq x < 2}$: $1 + x - 1 > -x + 2$ bzw. $x > 1$, also ist $L_2 = \{x \in \mathbb{R}\,|1 < x < 2\}$.
(iii) $\underline{x < 1}$: $1 - x + 1 > -x + 2$ bzw. $2 > 2$, also ist $L_3 = \{\}$.

Die Lösungsmenge von (1) ist somit $L = L_1 \cup L_2$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{|x|-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}, \qquad (|x| \neq 1)? \tag{2}$$

Fallunterscheidung:
(i) $\underline{|x| > 1}$: $2|x| - 2 \geq x^2 - 1$ bzw. $(|x|-1)^2 \leq 0$, also ist $L_1 = \emptyset$.
(ii) $\underline{|x| < 1}$: $2|x| - 2 \leq x^2 - 1$ bzw. $(|x|-1)^2 \geq 0$, also ist $L_2 = \{x \in \mathbb{R}\,| -1 < x < 1\}$.
Die Lösungsmenge von (2) ist somit $L = L_2 = \{x \in \mathbb{R}\,| -1 < x < 1\}$.