

Tutorium Mathematik I M WM Lösungen

14.11.2008

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{8k^2-2},$

Lösung:

Es gilt $\frac{k}{8k^2-2} > \frac{1}{8k}$ für alle $k \geq 1$. Aus der Divergenz von

$$\frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

und dem Minorantenkriterium folgt, dass die gegebene Reihe divergiert.

Alternativ kann man sich auch überlegen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert. Setzt man $b_n = \frac{k}{8k^2-2}$ dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{8k^2-2} k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{8k^2-2} = \frac{1}{8} > 0.$$

Daher ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ divergent.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+k^2+\sqrt{k}},$

Lösung:

Der dominierende Term ist 2^k . Deshalb schätzen wir ab:

$$\frac{1}{2^k+k^2+\sqrt{k}} < \frac{1}{2^k}.$$

Da die geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

für $q = \frac{1}{2}$ konvergiert, konvergiert auch die gegebene Reihe mit Hilfe des Majorantenkriteriums.

Alternativ kann man sich auch überlegen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergiert. Setzt man $b_n = \frac{1}{2^k+k^2+\sqrt{k}}$ dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k+k^2+\sqrt{k}} 2^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{k^2}{2^k}+\frac{\sqrt{k}}{2^k}} = 1 < \infty.$$

Daher ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k},$

Lösung:

Aufgrund des Terms 2^k versuchen wir, das Wurzelkriterium anzuwenden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{k^2}{2^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[k]{k^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Somit konvergiert die Reihe.

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!},$

Lösung:

Aufgrund des Terms $k!$ versuchen wir das Quotientenkriterium:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{k+1} k!}{(k+1)! 5^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{5}{k+1} \right| = 0 < 1.$$

Daher ist die Reihe konvergent.

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 - \sqrt[k]{a}), 0 < a \leq 1.$

Nach dem Konvergenzkriterium von Leibnitz ist die Reihe konvergent, falls $|a_k|$ mit $a_k = 1 - \sqrt[k]{a}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Da $a \leq 1$ gilt, folgt daraus, dass $a_k \geq 0$ und somit $|a_k| = a_k$ für alle $k \geq 1$. Wir werden zuerst die Monotonie nachweisen, d.h. $a_k = 1 - \sqrt[k]{a} \geq 1 - \sqrt[k+1]{a} = a_{k+1}$ was gleichbedeutend mit $\sqrt[k]{a} \leq \sqrt[k+1]{a}$ ist bzw. (nach Potenzieren mit $k(k+1)$ - ändert Ungleichung nicht, da $a_k \geq 0$) äquivalent zu $a^{k+1} \leq a^k$ ist. Dies ist eine wahre Aussage, da $0 < a \leq 1$ gilt. Somit haben wir eine monoton fallende Folge. Nun müssen wir noch zeigen, dass a_k gegen 0 konvergiert. Da $\sqrt[k]{a}$ für jedes positive a gegen 1 konvergiert (siehe Skriptium) folgt daraus, dass a_k eine Nullfolge ist.

Somit haben wir gezeigt, dass $|a_k|$ eine monoton fallende Nullfolge ist und daher aufgrund des Leibnitz'schen Kriteriums die Reihe konvergent ist.