Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
7.11.2008

1. $a_n = \frac{1}{n+1}\left(5n + \frac{n^3+7n+1}{n^2}\right)$

   Die Folge ist eine rationale Funktion in n und daher gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}\left(5n+\frac{n^3+7n+1}{n^2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{n^3+7n+1}{n^3+n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+\frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{5}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} + \frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\
&= \frac{5}{1+0}+\frac{1+0+0}{1+0} = 6
\end{aligned}$$

2. $a_n = n\left(\sqrt{6}-\sqrt{6-\frac{2}{n}}\right)$

   Zunächst bringen wir a_n auf eine einfachere Form:

$$a_n = n\left(\sqrt{6}-\sqrt{6-2/n}\right) = n\left(\sqrt{6}-\sqrt{6-2/n}\right)\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{6-2/n}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{6-2/n}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{6-2/n}\right)}.$$

   Nun folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{6-2/n}\right)} = \frac{2}{\sqrt{6}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{6-2/n}} = \frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

3. $a_n = \sqrt{n^2+n}-n$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4. $a_n = \frac{n}{n+\sin(n)}$
   Wir wissen, dass $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also schätzen wir ab:
$$x_n := \frac{n}{n+1} \leq a_n \leq \frac{n}{n-1} =: y_n$$
   Man sieht leicht, dass
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 = \lim_{n\to\infty} y_n$$
   gilt. Daraus folgt, dass auch die Folge a_n gegen 1 konvergieren muss!

5. $a_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}$
   Es gilt
$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$
   und daher
$$a_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1}.$$
   Nun gilt aber
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$
   Daraus kann man folgern, dass die Folge nicht konvergiert, aber die beiden Häufungspunkte $\pm\frac{1}{2}$ besitzt.

6. $a_n = \frac{7+a_{n-1}+2a_{n-1}^2}{10}$, $a_1 = 11/10$
   Es handelt sich um eine rekursive Folge und die ersten Folgenglieder lauten
$$a_1 = 1.1, a_2 = 1.052, a_3 \approx 1.02654, a_4 \approx 1.01341, a_5 \approx 1.0067.$$
   Es liegt daher die Vermutung nahe, dass die Folge monoton fallend ist.
   Zu zeigen ist daher, dass $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   Wir beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion:
   - Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für $n = 1$: $a_1 = 1,1 > 1,052 = a_2$.
   - Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass die Behauptung für $n-1$ richtig ist, d.h. dass $a_{n-1} \geq a_n$ gilt.
   - Induktionsschritt: Wir wollen zeigen, dass die Behauptung für n richtig ist, d.h. dass $a_n \geq a_{n+1}$ gilt.
     Zu diesem Zweck wenden wir folgende Äquivalenzumformungen an:
$$a_n \geq a_{n+1}$$
$$\frac{7+a_{n-1}+2a_{n-1}^2}{10} \geq \frac{7+a_n+2a_n^2}{10}$$
$$7+a_{n-1}+2a_{n-1}^2 \geq 7+a_n+2a_n^2$$
$$a_{n-1}+2a_{n-1}^2 \geq a_n+2a_n^2$$
$$a_{n-1}+2a_{n-1}^2-a_n-2a_n^2 \geq 0$$
$$(a_{n-1}-a_n)+2(a_{n-1}^2-a_n^2) \geq 0$$
$$(a_{n-1}-a_n)+2(a_{n-1}-a_n)(a_{n-1}+a_n) \geq 0$$
$$(a_{n-1}-a_n)(1+2a_{n-1}+2a_n) \geq 0$$

Wir beobachten nun, dass $1 + 2a_{n-1} + 2a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (aus dem Bildungsgesetz $a_{n+1} = (7 + a_n + 2a_n^2)/10$, erkennt man, dass, wenn $a_n \geq 0$ gilt, dann auch $a_{n+1} \geq 0$ gilt, da im Zähler und Nenner ausschließlich nicht-negative Zahlen auftreten. D.h., aus $a_1 = 1,1 \geq 0$ folgt $a_2 \geq 0$, aus $a_2 \geq 0$ folgt $a_3 \geq 0$ etc.) Da aufgrund der Induktionsannahme $a_{n-1} - a_n \geq 0$ gilt, sind beide Terme auf der linken Seite der letzten Ungleichung ≥ 0. Somit ist die Induktionsbehauptung bewiesen und daher die Folge (a_n) monoton fallend.

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge beschränkt ist:

Aus der Eigenschaft, dass (a_n) monoton fallend ist, folgt

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots a_n \geq \ldots$$

D.h. $a_1 = 1,1$ ist eine obere Schranke für die Folge (a_n). Da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe Punkt (c)) gilt, ist 0 eine untere Schranke. Somit ist die Folge (a_n) beschränkt, da sie nach oben und unten beschränkt ist.

Da (a_n) monoton fallend und beschränkt ist, ist (a_n) konvergent. Bezeichne a den Grenzwert, d.h. sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.

Wir betrachten das Bildungsgesetz der Folge und bilden den Limes auf beiden Seiten. Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte erhält man folgende Gleichung:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{7 + \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} 2a_n^2}{10} \tag{1}$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, erhält man aus (1) folgende Gleichung: $10a = 7 + a + 2a^2$ und $2a^2 - 9a + 7 = 0$

Um den Grenzwert a zu bestimmen, lösen wir diese quadratische Gleichung. Man erhält die Lösungen ${}_1a_2 = (9 \pm 5)/4$. Der Grenzwert a kann nicht gleich 3,5 sein, weil $a_1 = 1,1$ eine obere Schranke für a_n ist. Somit gilt $a = 1$, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.