Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
24.10.2008

1. Das Rechteck $ABCD$ liegt in der Ebene $E: 2x - 5y + 6z + d = 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnung von d, C und D:

   Da der Punkt A in der Ebene E liegt gilt $2 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + d = 0$ und es folgt $d = -25$.
   Der Punkt C kann nur auf der Ebene E liegen, wenn $2 \cdot 5 - 5 \cdot (-3) + 6 \cdot c_3 - 25 = 0$ erfüllt ist. Daher gilt $c_3 = 0$.
   Schließlich ergibt sich der Punkt D aus

$$D = A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (b) Das Rechteck ist Basis einer Pyramide mit der Höhe $h = 3\sqrt{65}$. Die Spitze S liegt auf der Geraden

$$g: X = \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 25 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   und hat ganzzahlige Koordinaten. Berechnen Sie S und zeigen Sie, dass die Kante DS normal auf die Grundfläche steht.

   Zur Berechnung der Spitze verwenden wir noch nicht die Tatsache, dass DS normal zur Grundfläche steht (auch wenn dies auf Grund der Zusatzfrage bekannt ist)!
   Die Spitze S hat von der Grundfläche einen Abstand von $3\sqrt{65}$, d.h. wir berechnen zuerst zwei zur Grundfläche parallele Ebenen (E_1 und E_2), mit einem Abstand von $3\sqrt{65}$. Wir wissen, dass die Punkte

$$S_i = A \pm \frac{3\sqrt{65}}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}. =$$

   auf der Ebene E_i liegen ($i = 1, 2$). Insgesamt gilt

$$S_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \\ 23 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ -13 \end{pmatrix}$$

   Die Ebenen E_i ($i = 1, 2$) sind parallel zur Ebene E und wir erhalten die Gleichung

$$E_i: 2x - 5y + 6z + d_i = 0$$

Setzen wir die Punkt S_i in die Ebenengleichungen ein, erhalten wir $d_1 = -220$ und $d_2 = 170$.
Schneiden wir die Ebene E_2 mit der Geraden g erhält man $12 + 6t + 120 - 25t + 150 - 12t = -170$ und daraus folgt $31t = 452$. Da t nicht ganzzahlig ist, kann dieser Schnittpunkt nicht die Spitze sein. Daher schneiden wir noch die Ebene E_1 mit g. Es gilt $12 + 6t + 120 - 25t + 150 - 12t = 220$ bzw. $t = 2$. Dies ergibt

$$S = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Weiters gilt

$$\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Da dieser Vektor parallel zum Normalvektor der Ebene E ist, steht die Kante DS normal zur Grundfläche!

(c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide!

Das Volumen V einer Pyramide ist

$$V = \frac{1}{3} G h$$

wobei G die Grundfläche und h die Höhe ist. In diesem Fall gilt $h = 3\sqrt{65}$ und

$$G = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{26} \cdot \sqrt{40}.$$

wobei

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ergibt sich $V = 260$.

2. Sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

$$\langle (\vec{a} \times \vec{b}), (\vec{c} \times \vec{d}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \tag{1}$$

Es gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} c_2 d_3 - c_3 d_2 \\ c_3 d_1 - c_1 d_3 \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren liefert

$$\begin{aligned} \langle (\vec{a} \times \vec{b}), (\vec{c} \times \vec{d}) \rangle &= a_2 b_3 c_2 d_3 - a_2 b_3 c_3 d_2 - a_3 b_2 c_2 d_3 + a_3 b_2 c_3 d_2 + \\ &+ a_3 b_1 c_3 d_1 - a_3 b_1 c_1 d_3 - a_1 b_3 c_3 d_1 + a_3 b_1 c_1 d_3 + \\ &+ \quad a_1 b_2 c_1 d_2 - a_1 b_2 c_2 d_1 - a_2 b_1 c_1 d_2 + a_2 b_1 c_2 d_1 \end{aligned}$$

Für die rechte Seite von (1) gilt:

$$(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)(b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3) - (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)(a1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3)$$

Durch Ausmultiplizieren sieht man sofort, dass beide Seiten in (1) gleich sind!