Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
17.10.2008

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}$$

Vereinfachen Sie $f(x)$ und skizzieren Sie den Graphen. Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Maximaler Definitionsbereich in $\mathbb{R}$: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Begründung: Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- $x - 3 \neq 0$ wegen Division durch $x - 3$: $x \neq 3$.
- $x + 3 \neq 0$ wegen Division durch $x + 3$: $x \neq -3$.
- $\frac{x+3}{x-3} \geq 0$ als Ausdruck in der Quadratwurzel.
  Das impliziert a) $x + 3 \geq 0$ und $x - 3 > 0$, oder b) $x + 3 \leq 0$ und $x - 3 < 0$.
  In a) $x \geq -3$ und $x > 3 \quad \Longrightarrow \quad x > 3$.
  In b) $x \leq -3$ und $x < 3 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -3$.
  Zusammengefasst: $x > 3$ oder $x \leq -3$
- $\frac{x-3}{x+3} \geq 0$ als Ausdruck in der Quadratwurzel.
  Analoge Rechnung wie im obigen Punkt ergibt $x \geq 3$ oder $x < -3$.
  (Oder man beobachtet, dass $\frac{x+3}{x-3} > 0$ nur dann wenn $\frac{x-3}{x+3} > 0$.)
- $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \neq 0$ da durch diesen Ausdruck dividiert wird.

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \neq \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \Longrightarrow \frac{x+3}{x-3} \neq \frac{x-3}{x+3} \Longrightarrow (x+3)^2 \neq (x-3)^2 \Longrightarrow 6x \neq -6x \Longrightarrow x \neq 0$$

Die Zusammenfassung aller Bedingungen ergibt $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ als Definitionsbereich.

Vereinfachung: $f(x) = \frac{x}{3}$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}} \quad = \quad \frac{\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)} = \frac{\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} + 2}{\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3}} =$$

$$\frac{\frac{(x+3)^2+(x-3)^2+2(x^2-9)}{x^2-9}}{\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{x^2-9}} \quad = \quad \frac{2x^2 + 18 + 2x^2 - 18}{12x} = \frac{4x^2}{12x} = \frac{x}{3}.$$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität:

Wählt man zwei Elemente x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich von f mit $x_1 \neq x_2$ so folgt $f(x_1) = \frac{x_1}{3} \neq \frac{x_2}{3} = f(x_2)$. Daher ist f injektiv.
Es gibt ein Element $y \in \mathbb{R}$, sodass es kein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt, d.h. nicht jedes Element in $\mathbb{R}$ wird als Bild von f getroffen. In unserem Fall erfüllt $y = 1$ diese Bedingung (denn dann müsste $x = 3$ sein aber 3 liegt nicht im Definitionsbereich). Also ist f nicht surjektiv.
Da f nicht surjektiv ist, kann f auch nicht bijektiv sein.

2. Im $\mathbb{R}^3$ sind die vier Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die letzte Koordinate x_3 von D derart, dass der Punkt D in der von A, B und C aufgespannten Ebene liegt.

Wir beschreiben die Ebene ε, die durch die Punkte A, B und C gegeben ist, zuerst als

$$\varepsilon : X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wobei

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei Richtungen der Ebene definieren. Im nächsten Schritt wollen wir die Ebene parameterfrei darstellen. Aus der ersten Zeile folgt $t = x_1 + 1$ und aus der zweiten Zeile ergibt sich $s = \frac{x_2}{2}$. Setzt man diese beiden Ergebnisse in die dritte Zeile ein, dann erhält man folgende Gleichung für die Ebene:

$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4.$$

Damit der Punkt D auf der Ebene ε liegt, muss

$$-2 \cdot 1 + 2 + 2 + 2x_3 = 4$$

gelten. Daher folgt $x_3 = 2$

3. Gegeben sind die zwei Ebenen:

$$\begin{array}{lcccccccc} E_1: & x & - & y & + & z & = & 2 \\ E_2: & 2x & + & y & & & = & 0 \end{array}$$

Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen!

Zuerst finden wir zwei Punkte, die auf beiden Ebenen liegen. Dazu setzen wir $x = 0$ und erhalten den Punkt

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $y = 0$ und löst das resultierende Gleichungssystem ergibt sich der Punkt

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Punkte legen bereits die Schnittgerade

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

eindeutig fest.