Tutorium Mathematik I M WM Lösungen
30.1.2009

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & p \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\det(A)$ und die Menge aller $p \in \mathbb{R}$ für die A regulär ist.
<u>Lösung:</u>

Entwicklung nach der ersten Zeile:
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & p \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & p \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & p \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (-2p+3) - (2p-9) + (-2+6) = -4p + 16.$$
Die Matrix A ist genau dann regulär, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt, d.h. $p \neq 4$.

2. Berechnen Sie die Lösungsmenge des komplexen linearen Gleichungssystems:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x_1 & & & + & i\,x_3 & = & i \\ x_1 & - & 3\,x_2 & - & i\,x_3 & = & 2\,i \\ i\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1+i \end{array}$$

<u>Lösung:</u>

Wir wenden elementare Zeilenumformungen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix an:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & i & i \\ 1 & -3 & -i & 2i \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 2 & 0 & i & i \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 0 & 6 & 3i & -3i \\ 0 & 1+3i & 0 & 3+i \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 0 & 2 & i & -i \\ 0 & 2+6i & 0 & 6+2i \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 0 & 2 & i & -i \\ 0 & 2+6i & 0 & 6+2i \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -i & 2i \\ 0 & 2 & i & -i \\ 0 & 0 & 3-i & 3+3i \end{array}\right)$$

Es gibt also eine eindeutige Lösung und zwar

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3+3\,i}{3-i} = \frac{1}{10}(3+3\,i)(3+i) = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}\cdot i, \\ x_2 &= \frac{-i-ix_3}{2} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cdot i\,, \\ x_1 &= 2\,i + 3\,x_2 + i\,x_3 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot i\,, \end{aligned}$$

also ist $L = \{\frac{1}{5}(3+i,\, 3-4\,i,\, 3+6\,i)\}$ die Lösungsmenge.