Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

57. Schreiben Sie das maximale Flussproblem als lineares Programm und zeigen Sie, dass die Restriktionsmatrix vollständig unimodular ist.

58. (a) Bestimmen Sie algorithmisch einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt für das Netzwerk in Abbildung 1!
    Starten Sie mit dem folgenden Fluss: $x(s,1) = x(1,4) = 5$, $x(4,t) = 6$, $x(2,5) = x(5,3) = x(3,t) = x(3,4) = 2$, $x(s,2) = 4$ und $x(4,5) = x(2,1) = x(1,3) = x(2,3) = x(5,t) = 1$.

    (b) Wie hoch ist der Wert eines minimalen Schnitts wenn die Kapazität der Kante $(5,3)$ auf 1 reduziert wird? Begründen Sie ihre Antwort sorgfältig!
    Hinweis: Verwenden Sie die Lösung aus Beispiel 58a.

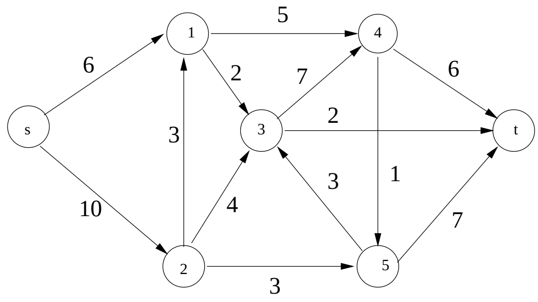

Abbildung 1: Netzwerk für Beispiel 58

59. Die Mitglieder des Sparvereins “Pfennigfuchser” veranstalten eine Weihnachtsfeier im Lokal “Zur Wildgans”. Um das gegenseitige Kennenlernen zu fördern, wird beschlossen, dass keine zwei Personen aus derselben Familie an einem Tisch Platz nehmen sollen. Im Sparverein sind Personen aus p Familien vertreten, und zwar a_i Personen aus Familie i, $i = 1, \ldots, p$. Gesucht ist nun eine Sitzverteilung, die die Sparrunde unter Berücksichtigung der obigen Einschränkungen aud die q Tische des Lokals aufteilt, wenn auf Tisch j, $j = 1, \ldots, q$, b_j Personen Platz finden. Formulieren Sie dieses Problem als Flussproblem auf einem geeignet definierten Netzwerk.

60. Satz von König: Sei G ein bipartiter Graph. Dann ist die maximale Kardinalität eines Matchings in G gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung von G.

    (a) Modellieren Sie das maximale Matchingproblem als ganzzahliges lineares Programm und zeigen Sie, dass die Ganzzahligkeitsbedingung vernachlässigt werden kann.

    (b) Stellen Sie das dazugehörige duale Problem auf und zeigen Sie damit den Satz von König!

61. Modellieren Sie das maximale Matchingproblem in bipartiten Graphen als Flussproblem und zeigen Sie, dass der Satz von König ein Spezialfall des Satzes über den maximalen Fluss und den minimalen Schnitt ist.

62. Gegeben sei ein minimales Schnittproblem. Seien $(X, \overline{X})$ und $(Y, \overline{Y})$ zwei Schnitte im Graphen G. Zeigen Sie, dass die Kapazität eines Schnittes eine submodulare Funktion ist, d.h., dass folgende Ungleichung für je zwei Schnitte in G gilt:

$$u(X, \overline{X}) + u(Y, \overline{Y}) \geq u(X \cup Y, \overline{X \cup Y}) + u(X \cap Y, \overline{X \cap Y}).$$

Beweisen Sie weiters die folgende Aussage: Falls $(X, \overline{X})$ und $(Y, \overline{Y})$ zwei minimale Schnitte sind, dann sind auch $(X \cup Y, \overline{X \cup Y})$ und $(X \cap Y, \overline{X \cap Y})$ minimale Schnitte.

63. Sei $N = (G, c, s, t)$ ein Netzwerk mit Quelle s, Senke t und oberen Kantenkapazitäten $c(i,j)$ und $d : V \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion. Ziel ist es einen maximalen Fluss zu finden, der neben den Flusserhaltungsgleichungen und Kapazitätsrestriktionen auch noch die Bedingung

$$\sum_{i \in V} f(i,v) \leq d(v) \quad \forall v \neq s, t$$

erfüllt.

(a) Reduzieren Sie dieses Problem auf ein gewöhnliches maximales Flussproblem.

(b) Testen Sie ihr Verfahren an dem Netzwerk in Abbildung 2 mit $d(4) = 2$ und $d(v) = \infty$ für alle $v \neq 4, s, t$.

64. Sei $N = (G, c, l, s, t)$ ein Netzwerk mit Quelle s, Senke t und oberen und unteren Kantenkapazitäten $c(i,j)$ bzw. $l(i,j)$. Gesucht ist ein Fluss $f(i,j)$, der die Flusserhaltungsgleichungen und $0 \leq l(i,j) \leq f(i,j) \leq c(i,j)$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass dieses Problem auf ein gewöhnliches maximales Flussproblem transformiert werden kann.

(b) Finden Sie mit der angegebenen Methode einen zulässigen Fluss für das Netzwerk mit unteren und oberen Kantenkapazitäten in Abbildung 3.

(c) Geben Sie ein Verfahren an, das ausgehend von einem zulässigen Fluss, einen maximalen Fluss für das modifizierte Problem findet.

(d) Testen Sie diesen Algorithmus am gleichen Netzwerk und starten Sie mit der Ausgangslösung $f(s,2) = 3$, $f(3,s) = 1$, $f(2,3) = 1$, $f(3,2) = 4$, $f(2,4) = 6$, $f(4,3) = 5$, $f(3,t) = 1$, $f(4,t) = 1$.

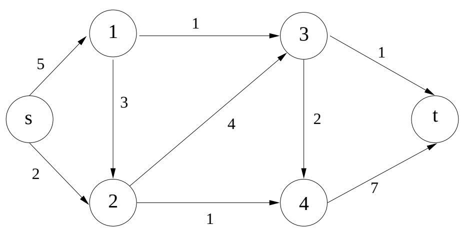

Abbildung 2: Kapazität für Knoten

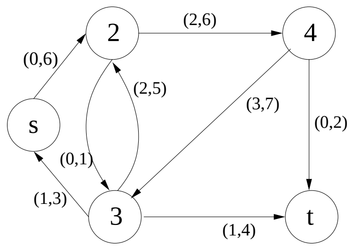

Abbildung 3: untere Kapazitätsschranken