Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

50. Modellieren Sie folgende Nebenbedingungen als lineares Programm mit binären Variablen:

    (a) Entweder $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ oder $x_1 + 4x_2 \leq 16$.

    (b) Wenn $x_1 > 0$ dann $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ($x_i \geq 0$).

    (c) Seien m lineare Restriktionen $f_i(x_1, \dots, x_n) \leq d_i$ für $i = 1, \dots, m$ gegeben. Modellieren Sie die Bedingung, dass mindestens $k < m$ Restriktionen erfüllt sein müssen.

    (d) Die lineare Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ muss Werte aus $\{d_1, \dots, d_m\}$ annehmen.

51. Modellieren sie mit Hilfe von binären Variablen eine stückweise lineare Zielfunktion mit n Knickstellen $b_1, \dots, b_n$.

52. Gegeben sei folgendes mathematische Modell

$$\max Z = 3x_1 + 2f(x_2) + 2x_3 + 3g(x_4)$$

    unter Einhaltung der Nebenbedingungen:

    (a) $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 15$.

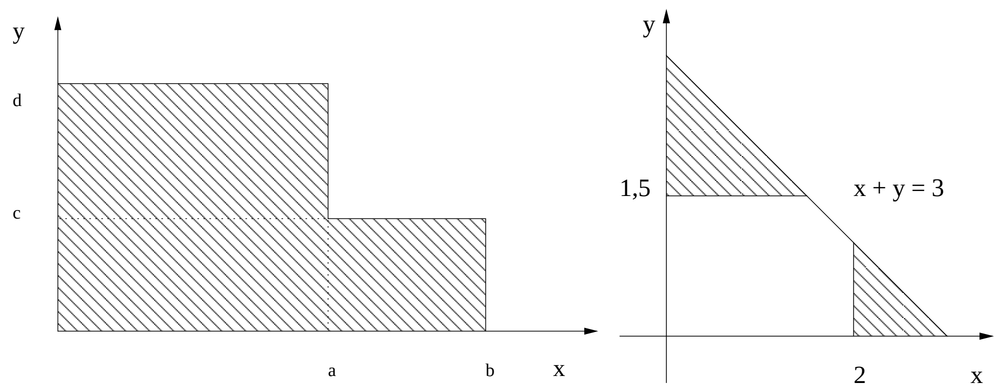
    (b) $x_1 = x_2$, oder $|x_1 - x_2| = 3$, oder $|x_1 - x_2| = 6$.

    (c) $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 4$ mit

$$f(x_2) = \begin{cases} -5 + 3x_2 & \text{wenn } x_2 > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x_4) = \begin{cases} -3 + 5x_4 & \text{wenn } x_4 > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

    Formulieren Sie dieses Problem als gemischt-ganzzahliges lineares Programm.

53. Die zulässigen Bereiche von zwei gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblemen (mit jeweils zwei kontinuierlichen Variablen) werden in den zwei folgenden Abbildungen dargestellt.



    Bestimmen Sie für jedes Problem die Menge von Restriktionen, die den dazugehörigen zulässigen Bereich beschreiben.

54. Ist die folgende Matrix vollständig unimodular?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

55. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph und $A = (a_{v,e})_{v \in V, e \in E}$ die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix, d.h. $a_{v,e} = 1$ falls $v \in e$ und 0 sonst. Dann ist A vollständig unimodular.

56. Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ist die Matrix A vollständig unimodular?

(b) Zeigen Sie, dass für alle ganzzahligen Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$ für die $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ nicht leer ist, alle Ecken von $P(b)$ ganzzahlig sind.

(c) Wie erklären sich Ihre Antworten zu den beiden vorhergehenden Punkten mit dem Zusammenhang zum Satz von Hoffmann und Kruskal aus der Vorlesung? Liegt hier ein Widerspruch vor?