

Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

44. Lösen Sie auf möglichst einfache Weise das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 4x_3 + 5x_4 \\ \text{unter} & x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 \geq 4 \\ & x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 \geq 6 \\ & x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 \geq 3 \\ & \quad - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{array}$$

$$x_4 \geq 0; x_1, x_2, x_3 \text{ nicht vorzeichenbeschränkt.}$$

45. Gegeben seien reelle Zahlen $c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_n$, und folgendes lineare Programm:

$$\max c^t x : \text{ unter } \sum_i x_i = 4, \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

Stellen Sie das duale Problem dazu auf, und geben Sie (ohne zu rechnen) eine optimale Lösung des primalen und dualen Problems an.

46. Dualität für lineare Programme mit Absolutbeträgen:

Bringen Sie ein lineares Programm, von der Art, wie sie im folgenden angegeben ist, in Standardform. Bestimmen Sie das duale Programm und vereinfachen Sie es.

- (a) ein lineares Programm, das in Standardform ist, außer dass die Variable x_1 nicht vorzeichenbeschränkt ist und in der (zu maximierenden) Zielfunktion in der Form $-|c_1 x_1|$ statt als Summand $c_1 x_1$ auftritt;
- (b) ein lineares Programm in Standardform mit einer zusätzlichen Restriktion der Form $|\alpha| \leq b$, wobei α eine lineare Funktion in den Variablen x_1, x_2, \dots (ohne konstantes Glied) und b eine Konstante ist.

47. Die Firma Breezy verkauft Klimaanlage in n verschiedene Regionen. Daher hat sich der Vorstand entschlossen, einige Fabriken in Städten dieser Regionen neu erbauen zu lassen.

Man kann davon ausgehen, dass man in Region j d_j Klimaanlage verkaufen kann und die Nachfrage auf Grund wirtschaftlicher Interessen vollständig gedeckt sein sollte. Die Transportkosten c_{ij} geben an, wie teuer es ist, eine Klimaanlage, die in Stadt i produziert wurde, in der Region j zu verkaufen. Außerdem fallen Fixkosten in der Höhe von f_i an, falls man sich dazu entschließt, in Stadt i eine Fabrik errichten zu lassen. Jede Fabrik kann dabei maximal K Klimaanlage produzieren. Ziel ist es, zu entscheiden, welche Fabriken gebaut werden sollen und einen Transportplan festzulegen, sodass die Kosten minimal sind.

Formulieren Sie das Problem als gemischt-ganzzahliges lineares Programm.

48. Formulieren Sie folgende Aufgabenstellung als gemischt-ganzzahliges lineares Programm:

Es soll eine Gemeinde neu am Reissbrett geplant werden. Eine der in diesem Rahmen zu treffenden Entscheidungen ist die Standortwahl für die zwei Feuerwehrestationen, die diese Gemeinde in Notfällen versorgen sollen. Zu Planungszwecken wurde die Gemeinde in 5 Sektoren unterteilt. Die Unterbringung beider Feuerwehrestationen im selben Sektor ist verboten. Jede Station ist für alle Einsätze in ihrem eigenen Sektor sowie in allen Sektoren, die dieser Station zugeordnet wurden, zuständig. (Eine Bedienung eines Sektors durch zwei Stationen ist nicht möglich.)

Die folgende Tabelle gibt die durchschnittliche Reaktionszeit (in Minuten) auf einen Notfall in Abhängigkeit vom Sektor und der Lage der diesem Sektor zugeteilten Versorgungsstation an.

		Reaktionszeit für Sektor				
		1	2	3	4	5
Zugeteilte Station hat Standort in Sektor	1	5	12	30	20	15
	2	20	4	15	10	25
	3	15	20	6	15	12
	4	25	15	25	4	10
	5	10	25	15	12	5

Die erwartete durchschnittliche Zahl an Einsätzen pro Tag pro Sektor ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Sektor				
	1	2	3	4	5
Anzahl an Einsätzen pro Tag	2	1	3	1	3

Es ist nun zu entscheiden, in welchen Sektoren die beiden Stationen untergebracht werden sollen sowie welche Station welchen Sektor betreut. Das Ziel ist die Minimierung der gesamten durchschnittlichen Reaktionszeiten der Feuerwehr.

49. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als gemischt-ganzzahliges lineares Programm:

Die Entwicklungsabteilung der Firma Superinno2000 hat vier mögliche Produkte für die neue Sommerkollektion entworfen. Das Management hat nun zu entscheiden, welche der vier neuen Produkte tatsächlich produziert werden sollen und in welchen Mengen. Die Einführung jedes der neuen Produkte ist mit fixen Anlaufkosten verbunden. Die folgende Tabelle enthält diese Anlaufkosten sowie den Erlös pro verkauftem Stück für jedes der Produkte.

	Produkt			
	1	2	3	4
Anlaufkosten (in €)	50000	40000	70000	60000
Erlös pro Stück (in €)	70	60	90	80

Das Management hat folgende Randbedingungen zu berücksichtigen:

- Es können aus Kapazitätsgründen maximal zwei der neuen Produkte gefertigt werden.
- Produkt 3 bzw. Produkt 4 kann nur produziert werden, wenn entweder Produkt 1 oder Produkt 2 hergestellt wird.
- Es stehen 6000 Stunden an Maschinenkapazität zur Verfügung. Es kann zwischen zwei alternativen Betriebsmodi der Fabrik ausgewählt werden. Im Modus 1 werden 5 Maschinenstunden zur Fertigung pro Stück des Produkts 1 benötigt, 3 Stunden für Produkt 2, 6 Stunden für Produkt 3 und 4 Stunden für Produkt 4. Im Modus 2 werden 4 Stunden pro Stück des Produkts 1 benötigt, 4 Stunden für Produkt 2, 3 Stunden für Produkt 3 und 4 Stunden für Produkt 4.