Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

37. Lösen Sie max $3x_1 + x_2$ unter den Restriktionen

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0} \end{array}$$

mit Hilfe des revidierten Simplexverfahrens.

38. Gegeben sei $\max c^t x$ unter $Ax \leq 0, x \geq 0$. Zeigen Sie: Entweder ist $x = 0$ eine optimale Lösung (es könnte auch noch andere optimale Lösungen geben), oder das Problem ist nach oben unbeschränkt.

39. Beweisen Sie:
Das primale lineare Programm

$$\max \{ c^t x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$$

hat genau dann für jeden Vektor b eine Optimallösung, wenn das duale lineare Programm

$$\min \{ b^t y \mid A^t y \geq c,\ y \geq 0 \}$$

mindestens einen zulässigen Punkt y hat, und wenn es eine Schranke K gibt, sodass für jeden zulässigen Punkt y des dualen linearen Programms gilt: $\|y\|_\infty \leq K$.

40. Sei A eine gegebene symmetrische $n \times n$ Matrix. Betrachten Sie das lineare Programm der Form $\min c^t x$ unter den Restriktionen $Ax \geq c$ und $x \geq 0$. Sei x^* ein Vektor mit $Ax^* = c$ und $x^* \geq 0$. Zeigen Sie, daß x^* eine Optimallösung des gegebenen linearen Programms ist.

41. A sei eine $m \times n$ Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$, und $K = \{x : Ax \leq b\}$. Weiters sei $x_0 \in K$ und $d \in \mathbb{R}^n$. Die Menge $T = \{x_0 + td : t \geq 0\}$ stellt einen 'Halbstrahl' im $\mathbb{R}^n$ dar (mit Anfangspunkt x_0 und Richtungsvektor d). Zeigen Sie:

$$T \subseteq K \Longleftrightarrow Ad \leq 0.$$

42. Lösen Sie mit Hilfe des dualen Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & & & + & x_3 & \geq & 4 \\ & & & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 5 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

$$0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 7,\ 0 \leq x_3 \leq 2.$$

43. Lösen Sie das folgende lineare Programm mit dem dualen Simplexverfahren

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & \geq & 6 \\ & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 10 \\ & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & \geq & 15 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Wie ändert sich die Optimallösung, wenn die zusätzliche Restriktion $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8$ eingeführt wird?