Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

31. Demonstrieren Sie die Simplexinterpretation des Simplex-Verfahrens anhand des folgenden linearen Programms:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

Hinweis: Bringen Sie dazu das lineare Programm zuerst auf die Form $\{\min c'x \mid Ax = b,\ e'x = 1,\ x \geq 0\}$ mit $e = (1, \ldots, 1)$.

32. Wieviele zulässige Basislösungen haben die folgenden lineare Programme:

(a) $\max x_1$ unter $0 \leq x_i \leq 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) $\max x_n$ unter $\alpha \leq x_1 \leq 1$ und $\alpha x_i \leq x_{i+1} \leq 1 - \alpha x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Hierbei ist α eine fix gewählte Zahl in $(0, \frac{1}{2})$.

Veranschaulichen Sie Ihre Resultate für die Fälle $n = 1, 2, 3$.

33. a) Es seien C_1 und C_2 disjunkte, nichtleere, kompakte und konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es dann eine Hyperebene gibt, die C_1 und C_2 <u>echt</u> trennt, d.h. $a'x < \alpha < a'y$ für alle $x \in C_1$, $y \in C_2$.

b) Diskutieren Sie das Beispiel

$$C_1 = \{(x, y) \mid xy \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$
$$C_2 = \{(x, y) \mid y = 0\}.$$

34. Beweisen oder widerlegen Sie: Seien C_1, C_2 disjunkte, nicht-leere konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Hyperebene, die C_1 und C_2 trennt.

35. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, dass die Lösung $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ für folgendes LP optimal ist:

$$\max\ 10x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & \leq & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 5 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\ & & 2x_2 & - & 5x_3 & \leq & 5 \\ & & & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.} \end{array}$$

36. Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & 7x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ & -4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & \geq & -3 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & \leq & 1 \\ & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_4} & \geq & 0 & & \end{array}$$

(a) Stellen Sie das zu (P) duale Problem auf.

(b) Beweisen Sie, dass $x = (0, \frac{4}{3}, \frac{-1}{7}, 0, \frac{1}{21})$ eine Optimallösung von (P) ist und geben Sie eine Optimallösung für das duale Problem an.