Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

17. Betrachten Sie das lineare Programm

$$\begin{array}{rrrl} \text{maximiere} & x_1 + & x_2 & \\ \text{unter} & sx_1 + & tx_2 & \le 1 \\ & & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}$$

Für welche Werte der Parameter s und t

(a) hat es eine Optimallösung?
(b) hat es eine eindeutige Optimallösung?
(c) ist es unzulässig?
(d) ist es unbeschränkt?

18. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Wenn das lineare Programm in Standardform

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \le & b_j & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \ge & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist, dann gibt es einen Index k, für den das lineare Programm

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & x_k & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \le & b_j & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \ge & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist.
Gilt die umgekehrte Folgerung?

19. Die Koeffizientenmatrix A und der rechte Seiten Vektor b eines linearen Programms seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zunächst die Basislösung, die der Basis $B = \{1, 2, 3\}$ enstpricht. Bestimmen Sie danach ausgehend von dieser Basislösung durch Pivotopertionen die restlichen Basislösungen.

20. Gegeben sei das lineare Programm $\max c^t x$ unter $Ax = b,\ x \ge 0$ mit

$$c^t = (-4 \ \ -1 \ \ -3 \ \ -1), \quad b^t = (3\ 2\ 2), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Simplextableau zur Basislösung $x^t = (1\ 1\ 1\ 0)$ und prüfen Sie, ob diese Lösung optimal ist.

21. Lösen Sie das folgende lineare Programm mit Hilfe der Simplex-Methode:

$$\min \ -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & \le & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & \le & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & \le & 3 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

22. Gegeben sei ein LP in zwei Variablen

$$\{\max c'x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

mit $x = (x_1, x_2)^t$. Nach Einführung der Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 ergibt sich während des Simplexalgorithmus folgendes Tableau:

		x_2	x_3
	c	a	b
x_1	e	d	1
x_4	2	f	-1
x_5	4	-1	1

(a) Für welche Wahl der Parameter a, b, c, d, e, f gelten die folgenden Aussagen?
- B ist optimal.
- Das momentane Tableau zeigt an, dass das Problem unbeschränkt ist?
- Durch den Austausch von x_3 mit x_5 ergibt sich eine zulässige Basislösung mit besserem Zielfunktionswert.

(b) Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Problem!

23. Folgendes Tableau ergab sich als Zwischenstufe bei der Lösung von $\min c^t x$ unter $Ax = b, x \geq 0$ mit Hilfe der Simplexmethode:

		x_2	x_3	x_5
	-8	8/3	-11	4/3
x_1	4	2/3	0	4/3
x_4	2	-7/3	3	-2/3
x_6	2	-2/3	-2	2/3

$B = \{1, 4, 6\}$ ist die augenblickliche Basis.

(a) Drücken Sie die augenblicklichen Basisvariablen und die Zielfunktion durch die augenblicklichen Nichtbasisvariablen aus.

(b) Welche Pivotoperation muß als nächstes folgen?

(c) Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Problem, falls folgendes noch bekannt ist:

$$c_1 = 1 \qquad c_4 = 3 \qquad A_B^{-1} = (a_1, a_4, a_6)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Lösen Sie das folgende Problem mit der Zweiphasenmethode:

$$\begin{array}{llllllllll}
\min & 5x_1 & + & 10x_2 & + & 15x_3 & + & 20x_4 & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & \geq & 5 \\
 & 8x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 6x_4 & \leq & 7 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & & & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$