Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

71. Sei z_G der Zielfunktionswert des Greedy-Algorithmus für das Rucksackproblem, z^* der optimale Zielfunktionswert und
$$\bar{z} := \max\{z_G, \max\{c_i : i = 1, \ldots, n\}\}.$$
Zeigen Sie, dass dann
$$\frac{z^*}{\bar{z}} \leq 2$$
erfüllt ist und es kein $k < 2$ gibt, sodass für alle Instanzen
$$1 \leq \frac{z^*}{\bar{z}} \leq k$$
gilt.

72. Gegeben sei das folgende Rucksackproblem:
$$\begin{array}{lccccccccccl} \max & 8x_1 & + & 14x_2 & + & 20x_3 & + & 4x_4 & + & 9x_5 & & \\ \text{s.t.} & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & \leq & 16 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$
   (a) Finden Sie mittels dynamischer Programmierung eine Optimallösung.
   (b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Branch-and-Bound Methode! Argumentieren Sie jeden Schritt gründlich!
   Hinweis: Starten Sie mit dem Teilproblem $x_5 = 0$!

73. Lösen Sie das ganzzahlige lineare Programm mit Branch and Bound:
$$\begin{array}{lcccccc} \max & 4x_1 & - & x_2 & & \\ \text{unter} & 7x_1 & - & 2x_2 & \leq & 14 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \end{array}$$
$$x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0$$

74. Entwickeln Sie ein dynamisches Programm zur Lösung des Rucksackproblems
$$\max \textstyle\sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ unter } \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b,\ x_j \in \mathbb{N}\ (j = 1, \ldots, n).$$
Testen Sie Ihr Verfahren an folgendem Problem:
$$\max\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5$$
unter
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 7,$$
$$x_j \in \mathbb{N}\ (j = 1, \ldots, 5).$$

75. Betrachten Sie das binäre Rucksackproblem
$$\text{(RP)} \max \textstyle\sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ unter } \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b,\ x_j \in \{0,1\},\ j = 1, \ldots, n.$$

sowie dessen LP-Relaxation, die sich durch Ersetzen der Ganzzahligkeitsbedingungen durch $0 \leq x_j \leq 1$, $j = 1, \ldots, n$, ergibt. Bezeichne z_{LP} den Optimalwert der LP-Relaxation. Sei $\widetilde{x}$ die Greedy-Lösung des Rucksackproblems, d.h. unter der Annahme von absteigend sortierten Quotienten c_j/a_j werden ausgehend vom Vektor $x = (0, \ldots, 0)$ von links nach rechts die Nullen durch Einsen ersetzt, solange dies auf eine zulässige Lösung führt. Bezeichne $s := \min\{t : \sum_{j=1}^{t} a_j > b\}$ den kritischen Index der ersten Null der Greedy-Lösung und sei $z_G = \sum_{j=1}^{n} c_j \widetilde{x}_j$ der Zielfunktionwert der Greedy-Lösung für das Rucksackproblem.
Beweisen Sie folgende Aussage, die zur einer Reduktion des Rucksackproblems verwendet werden kann: Es gibt eine Optimallösung x^* des Rucksackproblems mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(a) Gilt für ein $j \in \{1, \ldots, s-1\}$
$$z_{LP} - z_G \leq c_j - \frac{a_j c_s}{a_s}$$
so gilt $x_j^* = 1$.

(b) Gilt für ein $j \in \{s+1, \ldots, n\}$
$$z_{LP} - z_G < \frac{a_j c_s}{a_s} - c_j$$
so gilt $x_j^* = 0$.

76. Lösen Sie das binäre Rucksackproblem

$$\max 16x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 17x_4 + 20x_5 + 27x_6 + 4x_7 + 6x_8 + 8x_9 + 20x_{10} + 11x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13}$$

unter

$$7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 9x_{10} + 3x_{11} + 5x_{12} + 5x_{13} \leq 42,$$

$$x_j \in \{0, 1\} \ (j = 1, \ldots, 13).$$

indem Sie zuerst eine Problemreduktion mit Hilfe der in Aufgabe 75 beschriebenen Reduktionsmethode durchführen und dann auf das reduzierte Problem eine Methode Ihrer Wahl anwenden.