Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

65. Beweisen oder widerlegen Sie: Gegeben sei ein ganzzahliges lineares Programm IP in 2 Variablen: $\max\{c'x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{N}_0\}$. Sei $(x^\star) = (x_1^\star, x_2^\star)$ die Optimallösung der linearen Relaxation $\max\{c'x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R} \geq 0\}$ und sei diese nicht zulässig für das IP (Ganzzahligkeitsbedingung verletzt). Dann gibt es eine Optimallösung $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2})$ von IP, die sich durch Runden der Komponenten $x^\star$ ergibt, d.h. es gilt $\bar{x_1} \in \lfloor x_1^\star \rfloor, \lceil x_1^\star \rceil$ und $\bar{x_2} \in \lfloor x_2^\star \rfloor, \lceil x_2^\star \rceil$

66. Beweisen Sie die folgenden Aussage: Sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ eine vollständig unimodulare $m \times n$ Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ und σ eine Permutation, dann ist auch $B = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ vollständig unimodular.

67. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{N}_0$. Wir führen durch die Transformation
$$c'(i,j) := |E| \cdot c(i,j) + 1 \quad \forall (i,j) \in E$$
eine zweite Kapazitätsfunktion c' ein.
Zeigen Sie: Ist (S, T) ein c'-minimaler Schnitt, so ist (S, T) auch ein c-minimaler Schnitt und (S, T) hat die kleinste Zahl an Kanten unter allen c-minimalen Schnitten.

68. Beweisen Sie die folgende Aussage: Die maximale Anzahl an kanten-disjunkten Wegen zwischen zwei Knoten s und t in einem gerichteten, zusammenhängenden Graphen G entspricht der minimalen Anzahl von Kanten, die aus G entfernt werden müssen, um alle Wege von der Quelle zur Senke zu zerstören.

69. Lösen Sie das Transportproblem mit dem Algorithmus aus der Vorlesung für folgende Daten: $a = (3, 7, 3, 4, 2)$, $b = (4, 8, 7)$ und
$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung ist die Nordwesteckenregel zu verwenden.
Ist die Optimallösung eindeutig?

70. Betrachten Sie das Transportproblem mit der Kostenmatrix
$$C = \begin{pmatrix} 30 & 11 & 5 & 35 & 8 & 29 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 35 & 20 & 6 & 40 & 8 & 33 \\ 19 & 2 & 4 & 30 & 10 & 25 \end{pmatrix}$$
dem Angebotsvektor $a = (30, 10 + \varepsilon, 45, 30)$ und dem Bedarfsvektor $b = (25, 20 + \varepsilon, 6, 7, 22, 35)$ mit $0 \leq \varepsilon \leq 22$.

    (a) Zeigen Sie, dass der Transportplan
    $$X = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 3+\varepsilon & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 22 & 17 \\ 22-\varepsilon & 8+\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
    für $0 \leq \varepsilon \leq 22$ optimal ist.

    (b) Zeigen Sie, dass der Zielfunktionswert mit wachsendem ε streng monoton abnimmt.

(c) Sei C eine $m \times n$ Transportmatrix und q, r, s, t Indizes mit $1 \leq q \neq s \leq m$ und $1 \leq r \neq t \leq n$, sodass $c_{qt} + c_{sr} < c_{qr}$. Zeigen Sie, dass es Vektoren $a \neq a'$ und $b \neq b'$ mit $a' \geq a$ und $b' \geq b$ (komponentenweise) gibt, sodass für den optimalen Zielfunktionswert $f^*(C, a, b) > f^*(C, a', b')$ gilt.