Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2011

1. Eine Genossenschaft verfügt über 1000 Quadratkilometer Ackerland, die für den Anbau von Weizen, Roggen und Sojabohnen zur Verfügung stehen. Die Bewirtschaftung der Felder verlangt den Einsatz der nur begrenzt vorliegenden Ressourcen Wasser, Arbeitskraft und Geld. Maximal stehen 2000 Kubikmeter Wasser, 8000 Arbeitsstunden sowie 20000 $ an Budget zur Verfügung. Ferner sind folgende Randbedingungen zu beachten:

   - Pro km^2 an Land können 10t Roggen, 4t Weizen bzw. 6t Sojabohnen angebaut werden.
   - Pro km^2 an Land benötigt man für Roggen 3 l Wasser, für Weizen 1 l und für Sojabohnen 2 l.
   - Die Bebauung mit Roggen kostet pro km^2 15 $, mit Weizen 10 $ und mit Sojabohnen 12 $.
   - Die Bebauung mit Roggen erfordert pro km^2 8 Arbeitsstunden, jene mit Weizen 6 und jene mit Sojabohnen 10.
   - Der Profit pro produzierter Tonne beträgt für Roggen 10 $, für Weizen 6 $ und für Sojabohnen 8 $.

   Modellieren Sie die Aufgabe einen Bebauplan zu finden, der den Profit maximiert und alle Bedingungen einhält, als lineares Programm.

2. Ein Ernährungswissenschaftler in einem Forschungsinstitut für Nahrungsmittel möchte ein neues Mehrkornmehl entwickeln. Es stehen vier Ausgangskorntypen zur Verfügung, aus denen das neue Mehl gemischt werden soll. Diese vier Typen zeichnen sich durch die folgenden Charakteristika aus:

	% im Korn v. Typ			
	1	2	3	4
Stärke	30	20	40	25
Faseranteile	40	65	35	40
Eiweiß	20	15	5	30
Gluten	10	0	20	5
Kosten (€ pro kg)	0.5	0.3	0.4	0.6

   Bei der Zusammenstellung des neuen Mehles ist auf die Einhaltung der folgenden Vorschriften zu achten:

   - Aus geschmacklichen Gründen darf der Anteil des 2. Korntypes 20% nicht überschreiten. Ferner hat der Anteil des 3. Types mindestens 30% zu betragen und der Anteil des 1. Typs hat zwischen 10% und 25% zu liegen.
   - Der Eiweißgehalt des neuen Mehles hat mindestens 18% zu betragen. Der Glutengehalt muß zwischen 8% und 13% betragen und der Faseranteil darf maximal 50% ausmachen.

   Modellieren Sie die Aufgabe, aus den vier gegebenen Korntypen ein neues Mehl unter Beachtung der obigen Vorschriften mit dem Ziel der Kostenminimierung zu mischen, als lineares Programm!

3. Eine Nahrungsmittelfirma stellt aus Nüssen, Haferflocken und Rosinen die drei verschieden Sorten Müsli A, B und C her. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die Zusammenstellung der einzelnen Müslisorten.

	benötigte Einheiten pro Packung			Verkaufspreis
	Nüsse	Haferflocken	Rosinen	(€ pro Packung)
Müsli A	2	4	1	3,00
Müsli B	3	1	1	3,75
Müsli C	3	1	3	4,25
Kosten (€ pro Einheit)	0,5	0,25	0,75	

(a) Stellen Sie ein lineares Programm auf, das der Firma hilft, einen Produktionsplan zu entwerfen, der den Gewinn maximiert, wenn das vorhandene Kapital 1.000.000 € beträgt und höchstens 150000 Einheiten Nüsse, 200000 Einheiten Haferflocken und 300000 Einheiten Rosinen gelagert werden können.

(b) Welche Restriktionen müssen zusätzlich eingeführt werden, wenn aus technischen Gründen die Produktionsmenge einer Sorte maximal 50% der Gesamtproduktion ausmachen darf?

(c) Der Vorstand der Firma will die Marktposition stärken. Dazu ist es allerdings notwendig, alle drei Produkte zu verkaufen und auf einen Teil des maximalen Gewinns zu verzichten. Um dieses Konzept den Aktionären glaubhaft vermitteln zu können, sollte jede Sorte Gewinn machen. Erstellen Sie ein lineares Programm, das unter den obigen Voraussetzungen den kleinsten Gewinn der drei Müslisorten maximiert.

4. Ein Postamt benötigt an verschiedenen Wochentagen eine unterschiedliche Anzahl von Postbeamten. Langjährige Beobachtungen ergaben folgenden Bedarf.

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
17	13	15	19	14	16	11

Kollektivvertragliche Regelungen erfordern, daß jeder Angestellte 5 Tage arbeitet, und die zwei darauffolgenden Tage frei hat.

(a) Erstellen Sie ein Modell, mit dem ermittelt werden kann, wieviele Angestellte mindestens notwendig sind, um den Betrieb aufrechtzuerhalten.

(b) Angenommen, das Postamt verfügt über 25 Beamte und es können weder Neueinstellungen noch Kündigungen vorgenommen werden. Formulieren Sie das Problem, unter den gegebenen Bedingungen einen Arbeitsplan zu bestimmen, bei dem möglichst viele Beamte einen Wochenendtag (Samstag, Sonntag) frei haben, als lineares Programm.

(c) Angenommmen, es besteht die Möglichkeit von seiten der Postdirektion, einen kleinen Anteil der Beschäftigten zu veranlassen, auf einen freien Tag zu verzichten, und 6 Tage hintereinander zu arbeiten. Dabei werden für die ersten fünf Tage jeweils €1000/ Tag und am sechsten Tag €1400 bezahlt. Es können allerdings aufgrund einer gewerkschaftlichen Übereinkunft höchstens 20 % aller Beschäftigten für die Aufgabe eines freien Tages veranlasst werden. Wie ändert sich dann das Modell?

5. Eine Firma hat sich vertraglich verpflichtet, 20000 Radios innerhalb von vier Wochen an Kunden auszuliefern. Kunden, die in der ersten Woche beliefert werden, sind bereit, €20 zu bezahlen. In der zweiten Woche bezahlen die Kunden noch €18, in der dritten Woche nur mehr €16 und in der letzten Woche €14. Jeder Arbeiter der Firma kann 50 Radios in einer Woche zustellen. Mit dem momentanen Personalstand von 40 Arbeitern kann die Firma allerdings nicht alle Radios ausliefern. Daher müssen temporäre Hilfskräfte ausgebildet werden. Dabei ist es möglich, dass ein Arbeiter in einer Woche keine Radios verteilt, dafür aber drei Hilfskräfte einschult. Diese können danach entweder Radios ausliefern (ebenfalls 50 pro Woche) oder ihrerseits neue Personen einschulen (ebenfalls 3 pro Woche). Formulieren Sie das obige Problem als LP mit dem Ziel, die Einahmen des Unternehmens zu maximieren.

6. Ein Bus mit k Sitzplätzen fährt einmal täglich eine Route und bleibt dabei an genau n Stationen stehen (in der Reihenfolge $1, 2, \ldots, n-1, n$). An jeder Station kann der Fahrer entscheiden, welche Personen zu- bzw. aussteigen. Er kennt bereits am Beginn des Tages die Anzahl der Personen b_{ij}, die an der Station i warten und zur Station j gebracht werden wollen ($i < j$). Der Preis für ein Ticket von i nach j beträgt p_{ij}. Welche Personen soll der Busfahrer mitnehmen, wenn er die Einnahmen aus dem Fahrkartenverkauf maximieren möchte? Modellieren Sie das Problem als lineares Programm!

7. Ein Party-Service muss für Empfänge an 5 aufeinanderfolgenden Tagen Servietten zur Verfügung stellen. Der Bedarf an Servietten ist für jeden Tag bekannt.

Mo	Tu	We	Th	Fr
80	50	100	80	150

Der Party-Service-Dienst kann die benützten Servietten waschen lassen oder neue Servietten kaufen (2€ pro Serviette). Beim Waschen gibt es einen teureren Schnelldienst (1€ pro Serviette), der die Servietten schon am nächsten Tag gereinigt zurückliefert, und eine billigere Normalwäsche (0, 5€ pro Serviette), die die Servietten am dritten Tag liefert. Am Anfang hat der Party-Service-Dienst 20 saubere Servietten und keine schmutzigen Servietten. Wie kann der Party-Service-Dienst seine Servietten-Kosten minimieren? Modellieren Sie das Problem als LP!

8. Die Tochter der Familie MacKensie wird die Schule in vier Jahren abschließen. Ihre Eltern möchten bis zu diesem Zeitpunkt am Beginn jedes Jahres \$10.000 in Fonds ansparen. Dabei haben sie jedes Jahr folgende Möglichkeiten: Einen Fond A mit einer Laufzeit von einem Jahr und einem Ertrag von 5%, einen Fond B mit zweijähriger Laufzeit und einer Gesamtverzinsung von 12%. In diesem Jahr können sie außerdem noch einen Fonds kaufen, der vier Jahre läuft und am Ende der Laufzeit 21% garantiert. Helfen Sie den Eltern einen Investmentplan zu erstellen, der das verfügbare Kapital in vier Jahren maximiert. Modellieren Sie das Problem als LP!

9. Beim Fahrradproblem möchten n Personen, die über ein einsitziges Fahrrrad verfügen, einen d Kilometer langen Weg zurücklegen. Für jede Person $j = 1, \ldots, n$ ist die Gehgeschwindigkeit g_j und die Radfahrgeschwindigkeit f_j bekannt. Die Ankunftszeit der letzten ankommenden Person soll minimiert werden.

   (a) Zeigen Sie, dass der Optimalwert des folgenden linearen Programms eine untere Schranke für den Optimalwert liefert:

$$\begin{array}{lllll}
\min & t & & & \\
\text{s.t.} & t - x_j - x'_j - y_j - y'_j & \geq 0 & & j = 1, \ldots, n \\
 & t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y'_j & \geq 0 & & \\
 & g_j x_j - g_j x'_j + f_j y_j - f_j y'_j & = d & & j = 1, \ldots, n \\
 & \sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{j=1}^{n} f_j y'_j & \leq d & & \\
 & x_j, x'_j, y_j, y'_j & \geq 0 & & j = 1, \ldots, n
\end{array}$$

   Was bedeuten die Variablen x_j, x'_j, y_j, y'_j?

   (b) Lösen Sie das Fahrradproblem für $n = 3, d = 100, g_1 = g_2 = 1, g_3 = 2, f_1 = f_2 = 6, f_3 = 8$. (Geschwindigkeit in km/h).
   Hinweis: Die optimale Lösung des linearen Programms für diesen Fall ist $x_3 = 54, x_1 = x_2 = 46, y_1 = y_2 = 9, y'_3 = 1$. Alle anderen Werte sind 0.

   (c) Betrachten Sie folgendes Beispiel für $n = 4$ und $d = 90$: $g_1 = g_2 = 13, g_3 = g_4 = 3, f_1 = f_2 = 27, f_3 = f_4 = 18$. Zeigen Sie, dass der Optimalwert des LPs echt kleiner ist als die Optimallösung des Fahrradproblems.
   Hinweis: Das LP hat in diesem Fall die eindeutige Optimallösung $x_1 = x_2 = 9, x_3 = x_4 = 6, y_3 = y_4 = 4, y'_1 = y'_2 = 1$ und alle anderen Werte sind 0.