Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2009

33. Lösen Sie max $3x_1 + x_2$ unter den Restriktionen

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0} \end{array}$$

unter Verwendung des revidierten Simplexverfahrens.

34. a) Es seien C_1 und C_2 disjunkte, nichtleere, kompakte und konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es dann eine Hyperebene gibt, die C_1 und C_2 <u>echt</u> trennt, d.h. $a'x < \alpha < a'y$ für alle $x \in C_1$, $y \in C_2$.

    b) Diskutieren Sie das Beispiel

$$C_1 = \{(x,y) \mid xy \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$
$$C_2 = \{(x,y) \mid y = 0\}.$$

35. Beweisen oder widerlegen Sie: Seien C_1, C_2 disjunkte, nicht-leere konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Hyperebene, die C_1 und C_2 trennt.

36. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, dass die Lösung $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ für folgendes LP optimal ist:

$$\max\ 10x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & x_2 & & & \leq\ 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq\ 5 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & & & \leq\ 5 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq\ 7 \\ & & 2x_2 & - & 5x_3 & \leq\ 5 \\ & & & & \multicolumn{2}{r}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.} \end{array}$$

37. Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & 7x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ & -4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & \geq & -3 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & \leq & 1 \\ & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, x_4} & \geq & 0 & & & & \end{array}$$

(a) Stellen Sie das zu (P) duale Problem auf.

(b) Beweisen Sie, dass $x = (0, \frac{4}{3}, \frac{-1}{7}, 0, \frac{1}{21})$ eine Optimallösung von (P) ist und geben Sie eine Optimallösung für das duale Problem an.

38. Gegeben seien reelle Zahlen $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > c_n$, und folgendes lineare Programm:

$$\max\ c^t x : \quad \text{unter} \quad \sum_i x_i = 3, \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

Stellen Sie das duale Problem dazu auf, und geben Sie (ohne zu rechnen) eine optimale Lösung des primalen und dualen Problems an.

39. Gegeben sei $\max c^t x$ unter $Ax \leq 0, x \geq 0$. Zeigen Sie: Entweder ist $x = 0$ eine optimale Lösung (es könnte auch noch andere optimale Lösungen geben), oder das Problem ist nach oben unbeschränkt.

40. Beweisen Sie:
Das primale lineare Programm
$$\max\{\, c^t x \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \,\}$$
hat genau dann für jeden Vektor b eine Optimallösung, wenn das duale lineare Programm
$$\min\{\, b^t y \mid A^t y \ge c,\ y \ge 0 \,\}$$
mindestens einen zulässigen Punkt y hat, und wenn es eine Schranke K gibt, sodass für jeden zulässigen Punkt y des dualen linearen Programms gilt: $\|y\|_\infty \le K$.

41. Lösen Sie auf möglichst einfache Weise das folgende lineare Programm:
$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 4x_1 & & & + & 4x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{unter} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \ge & 4 \\
& x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \ge & 6 \\
& x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \ge & 3 \\
& & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1
\end{array}$$
$$x_4 \ge 0;\ x_1, x_2, x_3 \text{ nicht vorzeichenbeschränkt.}$$

42. Sei A eine gegebene symmetrische $n \times n$ Matrix. Betrachten Sie das lineare Programm der Form $\min c^t x$ unter den Restriktionen $Ax \ge c$ und $x \ge 0$. Sei x^* ein Vektor mit $Ax^* = c$ und $x^* \ge 0$. Zeigen Sie, daß x^* eine Optimallösung des gegebenen linearen Programms ist.

43. A sei eine $m \times n$ Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$, und $K = \{x : Ax \le b\}$. Weiters sei $x_0 \in K$ und $d \in \mathbb{R}^n$. Die Menge $T = \{x_0 + td : t \ge 0\}$ stellt einen 'Halbstrahl' im $\mathbb{R}^n$ dar (mit Anfangspunkt x_0 und Richtungsvektor d). Zeigen Sie:
$$T \subseteq K \iff Ad \le 0.$$