Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2009

20. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Wenn das lineare Programm in Standardform

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_j & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist, dann gibt es einen Index k, für den das lineare Programm

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & x_k & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_j & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist.
Gilt die umgekehrte Folgerung?

21. Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform der Form $\max c^t x$ unter $Ax \leq b$, $x \geq 0$ sowie das folgende zugehörige Tableau mit der Basis $B = (x_3, x_4, x_6)$.

	x_1	x_2	x_5	
10	c_1	c_2	0	
b_1	4	a_1	a_2	x_3
2	-1	-5	-1	x_4
3	a_3	-3	-4	x_6

Für welche Wahl der Parameter a_1, a_2, a_3, b_1, c_1 und c_2 gelten die folgenden Aussagen?

(a) B ist nicht zulässig.

(b) B ist zulässig, aber entartet.

(c) B ist zulässig, aber nicht optimal und nicht degeneriert.

(d) B ist optimal.

(e) B ist zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung.

(f) B ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig?

(g) B ist zulässig, aber durch Austausch der Basisvariablen x_6 gegen x_1 ergäbe sich eine Verbesserung?

(h) Wird x_2 in die Basis aufgenommen und x_3 im Gegenzug aus der Basis entfernt, so erhält man eine neue zulässige Basis mit einem Zielfunktionswert < 10.

22. Folgendes Tableau ergab sich als Zwischenstufe bei der Lösung von $\min c^t x$ unter $Ax = b, x \geq 0$ mit Hilfe der Simplexmethode:

		x_2	x_3	x_5
	-8	8/3	-11	4/3
x_1	4	2/3	0	4/3
x_4	2	-7/3	3	-2/3
x_6	2	-2/3	-2	2/3

$B = \{1, 4, 6\}$ ist die augenblickliche Basis.

(a) Drücken Sie die augenblicklichen Basisvariablen und die Zielfunktion durch die augenblicklichen Nichtbasisvariablen aus.

(b) Welche Pivotoperation muß als nächstes folgen?

(c) Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Problem, falls folgendes noch bekannt ist:

$$c_1 = 1 \qquad c_4 = 3 \qquad A_B^{-1} = (a_1, a_4, a_6)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Lösen Sie das folgende Problem mit der Zweiphasenmethode:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & \\ \text{unter} & -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 9 \\ & 4x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & \leq & 5 \\ & -3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 14 \\ & & & 0 & \leq & x_1 & \leq & 2 \\ & & & 0 & \leq & x_2 & \leq & 5 \\ & & & 0 & \leq & x_3 & \leq & 2 \end{array}$$

24. Lösen Sie das folgende lineare Programm mit der M-Methode:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & x_1 & & & - & x_3 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0 \end{array}$$

25. Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 4 \\ & 2\,x_1 & & & + & 3\,x_3 & \leq & 5 \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \\ & 4\,x_1 & & & + & 4\,x_3 & \leq & 11 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & \end{array}$$

(a) mit der Regel von Bland,

(b) mit der lexikographischen Zeilenauswahlregel.

26. Gegeben sei ein lineares Programm $\max\{c'x |\ Ax \leq b,\ x \geq 0\}$.
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- Ist $\bar{x}$ eine zulässige, entartete Ecke von M, in der das Maximum der Optimierungsaufgabe angenommen wird, und ist B eine zu $\bar{x}$ gehörende Basis, so gilt für die reduzierten Kostenkoeffizienten $\tilde{c}_j \leq 0$ für alle $j \in N$.
- Es sei $x = (x_B, x_N)$ eine nicht zulässige Basislösung des linearen Programms mit $\tilde{c}_j \leq 0,\ j \in N$. Dann gilt $c'x \geq c'y$ für alle zulässigen $y \in M$.