Mathematische Optimierung Übungsbeispiele SS 2009

11. Generieren Sie in AMPL Zufallszahlen (zwischen 1 und 100) für den täglichen Bedarf im Personaleinsatzplanproblem (Beispiel 3a am ersten Übungszettel - die AMPL Files für dieses Problem finden Sie auf der Übungshomepage). Lösen Sie dann das Problem und auch die lineare Relaxation und bestimmen Sie den " relative integrality gap" , d.h. den Quotienten

$$\frac{|z^* - \bar{z}|}{z^*}$$

wobei z^* der optimalen Zielfunktionswert und $\bar{z}$ der optimale Zielfunktiosnwert der Relaxation ist. Lösen Sie nun mehrere Instanzen unter Verwendung einer FOR-Schleife im run-File und analysieren Sie diesen Quotienten!

12. Modellieren Sie folgendes Problem als Lineares Programm (ohne es zu lösen):

$\min |x_1 - 2x_2 + x_3|$ unter $Ax \geq b$, $x \geq 0$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

13. Betrachten Sie die folgende Zielfunktion:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 < 0 \\ 4x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Läßt sich die Maximierung bzw. Minimierung dieser Funktion mit Hilfe einer linearen Formulierung in ein lineares Programm integrieren?

14. Betrachten Sie das lineare Programm

$$\begin{array}{rrrl} \text{maximiere} & x_1 + & x_2 & \\ \text{unter} & sx_1 + & tx_2 & \leq 1 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Für welche Werte der Parameter s und t

(a) hat es eine Optimallösung?
(b) hat es eine eindeutige Optimallösung?
(c) ist es unzulässig?
(d) ist es unbeschränkt?

15. Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{llcllc} \text{Minimiere} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & (|c_1| + |c_2| > 0) \\ \text{unter} & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 45 \\ & x_1 & & & \leq & 5 \\ & -x_1 & + & 5x_2 & \geq & 5 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Formen Sie dieses Problem in Standardform um.
b) Berechnen Sie die Ecken der Menge M der zulässigen Punkte.
c) Geben Sie alle möglichen Basislösungen an und interpretieren Sie diese geometrisch.

16. Gegeben sei das lineare Programm $\max c^t x$ unter $Ax = b,\ x \geq 0$ mit

$$c^t = (-5\ c_2\ 3\ 4), \quad b^t = (6\ 5), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Basislösung zu den Spalten 3 und 4, und zeigen Sie, dass diese Basislösung zulässig ist. Ist diese Basislösung entartet?

(b) Für welche Werte von c_2 ist diese Lösung optimal?

17. Die Koeffizientenmatrix A und der rechte Seiten Vektor b eines linearen Programms seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zunächst die Basislösung, die der Basis $B = \{1, 2, 3\}$ entspricht. Bestimmen Sie danach ausgehend von dieser Basislösung durch Pivotopertionen die restlichen Basislösungen.

18. Gegeben sei das lineare Programm $\max c^t x$ unter $Ax = b,\ x \geq 0$ mit

$$c^t = (-4\ -1\ -3\ -1), \quad b^t = (3\ 2\ 2), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Simplextableau zur Basislösung $x^t = (1\ 1\ 1\ 0)$ und prüfen Sie, ob diese Lösung optimal ist.

19. Lösen Sie das folgende lineare Programm mit Hilfe der Simplex-Methode:

$$\min \ -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$