

# Mathematik I M WM Übungen WS 2010/11

## 8. Übungsblatt

48. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\ln(1+x-x^2)} \right)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{x}{1-e^x}} + 2^{-\frac{x}{1-e^{-x}}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2-x) \left( \frac{\sinh(x)-x}{\ln(2-x)(e^x-x-1)} \right)$

49. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$\frac{x - \sqrt{\sin x}}{\sin \sqrt{x}}$$

nicht definiert und welcher Grenzwert ergibt sich für  $x \rightarrow 0$ ?

50. Die Funktion

$$P(\varphi) = \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - 0.5 \cos \varphi)^5}$$

tritt bei der Energieberechnung eines beschleunigten Teilchens auf. Berechnen Sie ihre Extremalstellen für  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

51. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der auf dem Intervall  $[0, 1]$  definierten Funktion

$$f(x) := \begin{cases} (x+1) \log_2(x+1) - x \log_2 x - 4x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion.

52. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \geq 2 \\ -\frac{4}{|x|} & |x| < 2 \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich!
- (b) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist die Funktion stetig bzw. differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls den Wert der Ableitung an!
- (c) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion am Rande des Definitionsbereiches (auch  $\pm\infty$ ).

53. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 4x + 3}\right).$$

- (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen.
- (b) Berechnen Sie alle lokalen Extremstellen und stellen Sie fest, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt.
- (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten (Begründung!) und das Verhalten der Funktion am Rande des Definitionsbereichs.