

Mathematik I M WM Übungen WS 2010/11

5. Übungsblatt

30. Stellen Sie für folgende Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fest, ob sie konvergent sind. Bestimmen Sie bei konvergenten Folgen den Grenzwert, bei divergenten Folgen alle Häufungspunkte.

(a) $a_n = \frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)}$

(b) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$,

(c) $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n+7} + \sin(n\pi) \cdot n^2$,

(d) $a_n = \frac{n}{3^n}$,

(e) $a_n = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(f) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}} \binom{n}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi}{2}$

(g) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{n+(-1)^n n}}$

31. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert an:

(a) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$

(b) $a_n = (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(c) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+5}$

32. Zeigen Sie:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2+1} = 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3(3^n+5)} = 3$

33. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n = \sqrt{\frac{n^2 + \cos(n\pi)}{3n^2 + \sqrt{n}}}$

(b) $a_n = \sqrt[n]{3 \binom{n}{3}}$

34. Zeigen Sie, dass die folgenden rekursiv gegebenen Folgen konvergieren und bestimmen Sie ihren Grenzwert:

(a) $a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$

(b) $a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$.

35. Untersuchen Sie die folgende rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_1 = 0; \quad a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n}.$$