Nr. 29a.)

Es gilt $\sin \alpha = \dfrac{\tan \alpha}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$

$$\Rightarrow \sin(\arctan(x)) = \frac{\tan(\arctan x)}{\sqrt{1+[\tan(\arctan(x))]^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Die Identität erhalten wir aus der Definition der hyperbolischen Funktionen und den binomischen Formeln durch

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh x}{\cosh x + 1} &= \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 1} \\
&= \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x}) + 2} \\
&= \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})}{(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2} \\
&= \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{\sinh \frac{x}{2}}{\cosh \frac{x}{2}} = \tanh \frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $2\sinh x = e^x - e^{-x} \le e^x + e^{-x} = 2\cosh x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $e^x \ge 1$ und $e^{-x} \in (0, 1)$ für $x > 0$. Also folgt die Abschätzung

$$0 \le \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \le 1$$

für alle $x \ge 0$.

Aus der Symmetrie $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ folgt nun weiterhin

$$-1 \le \tanh x \le 0$$

für $x < 0$. Also ist $\tanh x \in (-1, 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.