

**Mathematik I M WM Übungen WS 2010/11**  
**3. Übungsblatt**

17. Das Rechteck  $ABCD$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

liegt in der Ebene  $E : 2x - 5y + 6z + d = 0$ .

- (a) Berechnen Sie  $d, C$  und  $D$ .
- (b) Das Rechteck ist Basis einer Pyramide mit der Höhe  $h = 3\sqrt{65}$ . Die Spitze  $S$  liegt auf der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 25 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und hat ganzzahlige Koordinaten. Berechnen Sie  $S$  und zeigen Sie, dass die Kante  $AS$  normal auf die Grundfläche steht.

18. Die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

definieren eine Ebene  $E$ .

- (a) Geben Sie die Ebenen  $E$  parameterfrei an!
- (b) Welche Punkte auf der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

haben von der Ebene  $E$  einen Abstand von 3?

19. Gegeben sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $ABC$  ein rechtwinkeliges Dreieck bildet.
- (b) Bestimmen Sie die Winkelsymmetrale  $w$  des rechten Winkels und geben Sie den Schnittpunkt  $S$  von  $w$  mit der Hypotenuse an. In welchem Verhältnis wird die Hypotenuse von  $S$  geteilt?
- (c) Welchen Abstand hat  $P$  von der Ebene  $E$ , die durch das Dreieck  $ABC$  definiert wird?
- (d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene  $E$  mit der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(e) In welchem Winkel schneidet die Gerade  $g$  die Ebene  $E$ ?

20. Gegeben ist die Ebene  $E$  durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

sowie die Ebene  $F$  durch den Punkt

$$R = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix},$$

und durch die Gerade

$$g : X = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die beiden Ebenen  $E$  und  $F$  parameterfrei an!

(b) In welchem Punkt durchstößt die Gerade  $g$  die Ebene  $E$ ?

(c) Wie lautet die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen  $E$  und  $F$ ?

21. Die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ z_A \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ y_B \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x_D \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

sind die Eckpunkte eines Parallelogramms, das in der Ebene  $\varepsilon : x - y + z = 10$  liegt. Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte  $A, B, D$  sowie die Koordinaten des Punktes  $C$ . Errichten Sie über dem Parallelogramm als Grundfläche eine gerade Pyramide von der Höhe  $h = 4\sqrt{3}$ . Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze  $S$  (zwei Lösungen!) und das Volumen der Pyramide!

22. Gegeben sind die Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$h : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden und die jeweiligen Fußpunkte!

23. Stellen Sie fest, welche Kegelschnitte durch folgende Gleichungen gegeben werden und bestimmen Sie die Brennpunkte!

(a)  $9x^2 - 3x - 4y^2 + 6y = 14$

(b)  $32x^2 - 32x + 64y^2 + 16y = 7$

(c)  $x^2 - 8x + y^2 = -4(y + 1)$