Mathematik I M WM Übungen WS 2010/11
12. Übungsblatt

72. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$?

(a) $\{\vec{x} : x_1 = a\}$, a konstant (b) $\{\vec{x} : x_1 \geq 0\}$ (c) $\{\vec{x} : x_1 x_2 = 0\}$
(d) $\{\vec{x} : x_1 = 0\} \cup \{\vec{x} : x_2 = 0\}$ (e) $\{\vec{x} : x_1 = 0\} \cap \{\vec{x} : x_2 = 0\}$

73. Betrachten Sie den Unterraum U des $\mathbb{R}^3$, der durch die folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von U? Welche Dimension hat U? Ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Stellen Sie $w_1 = (2, -2, 3)^t$ als Linearkombination von u_1, u_2 und u_3 dar.

74. Sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Unterraumes, der von obigen Vektoren aufgespannt wird!

75. Bestimmen Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit vom Parameter λ.

76. Lösen Sie die folgenden homogenen Gleichungssysteme $Ax = 0$ mit

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

77. Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b$ mit

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

78. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 5a+1 \\ -4 & -5 & -2a \\ 4 & a & 2a+4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4a+6 \\ -2a \\ a+9 \end{pmatrix}$$

(a) keine Lösung,

(b) eine eindeutig bestimmte Lösung,

(c) beliebig viele Lösungen besitzt. Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge an.

79. (a) Berechnen Sie mittels verschiedener Methoden $\det A$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie $\det A$ für

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$